درس تئوری اطلاعات و کدینگ ۶ پاییز ۹۹

- سیلابس
- معرفی مختصر IT
- مرور آمار و احتمال (۲ جلسه)

سیلابس:

① Information Measures ← shannon entrop & Differential ent.

kL-divergence

mutual info. (اطلاعات متقابل)

معرفی و خواص

~~Fisher Info.~~

~~Renyi Information~~

② Source Coding: کدگذاری منبع (فشرده‌سازی)

- تعریف یک منبع اطلاعاتی از نظر ریاضی
- قضیه شنون: حد فشرده‌سازی یک منبع اطلاعاتی
- Huffman Code: کد بهینه برای فشرده‌سازی (با فرض داشتن توزیع منبع)
- ؟ Universal source coding (با فرض نداشتن توزیع منبع)
- ؟ Rate distortion: فشرده‌سازی با فرض اینکه به طور تقریبی پیام اولیه را بازسازی کنیم. mp3 و Jpeg mp4

---

③ Channel Coding (کدگذاری کانال)

- تعریف و مدل‌سازی ریاضی کانال (نویزی)
- نشان می‌دهیم یک کمیت C به نام ظرفیت کانال $C \ \frac{\text{bit}}{\text{channel use}}$
- نحوه محاسبه ظرفیت

قضیه کانال شنون

(نرخ ارسال اطلاعات) $R < C$ → ارسال (تقریبا) بدون خطا بر روی کانال

$R > C$ → قطعا خطای زیادی خواهیم داشت

- ارائه کدهایی که بتوانیم به ظرفیت کانال برسیم. (از نظر پیاده‌سازی بهینه و سریع باشند).

---

* مطالب دیگر

- بحث‌های آماری
- کاربرد تئوری اطلاعات در مسائل شمارش و ترکیبیاتی
- کاربرد تئوری اطلاعات در یادگیری ماشین

مرور مختصری بر تئوری اطلاعات:

- کدگذاری منبع:

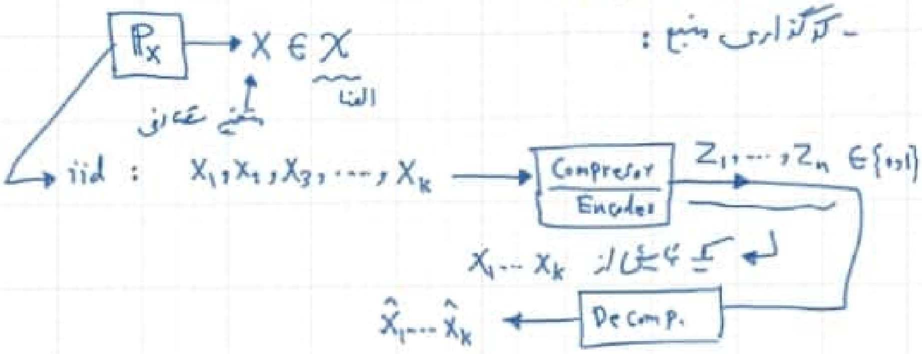
$\boxed{P_X} \to X \in \mathcal{X}$

متغیر تصادفی

الفبا

مرور مختصری بر تئوری اطلاعات :

- کدگذاری منبع :

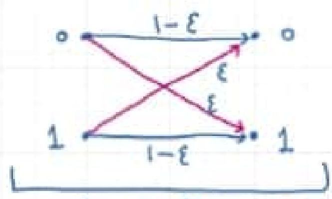


سوال: کوتاه‌ترین طول نمایش $Z_1 \dots Z_n$ چقدر است که $\hat{X}_1 \dots \hat{X}_k = X_1 \dots X_k$ ؟

پاسخ این سوال به آنتروپی منبع X مربوط است.

---

* کدگذاری کانال :



$P_{Y|X}(0|0) = 1-\varepsilon$

$P_{Y|X}(1|0) = \varepsilon$

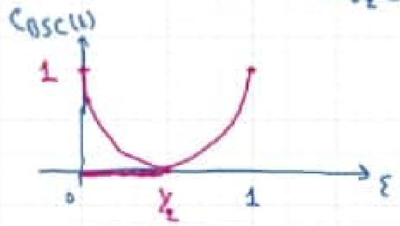
Binary Symetric Channel: $BSC(\varepsilon)$

برای هر کانال نویزی $P_{Y|X}$ $\Leftarrow$ یک ظرفیت C داریم.

بر اساس اطلاعات متقابل بیان می‌شود.

$$C_{BSC(\varepsilon)} = 1 - h_2(\varepsilon)$$

$$\hookrightarrow = -\varepsilon \log_2 \varepsilon - (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)$$



مرور احتمالات :

فضای احتمالاتی : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- $\mathbb{P}$ → تابع احتمالات
- $\mathcal{F}$ → مجموعه وقایع
- Ω → Sample space (فضای نمونه)

مجموعه همه خروجی های آزمایش تصادفی

σ-field $\leftarrow \mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$

① $\Omega \in \mathcal{F}$

② if $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

③ $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Prob. Func. $\mathbb{P}$:

① $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A] \geq 0$

② $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

oard 216732-5198-9351.b. Func. $\mathbb{P}$:

① $\forall A \in F : \mathbb{P}[A] \geq 0$

② $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

③ $A_1, A_2, \dots \in F \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$

اگر خروجی یک آزمایش تصادفی $w \in \Omega$ باشد. آنگاه گوییم واقعه A اتفاق افتاده اگر که $w \in A$.

$A = \{1, 3, 5\}$

احتمال شرطی

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$$

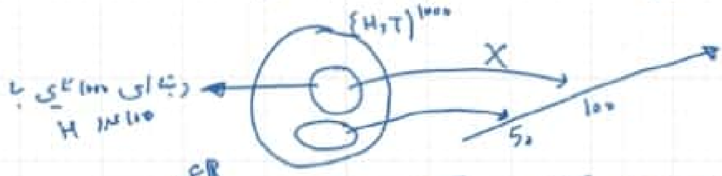
استقلال بین وقایع :

وقایع $A_1, \dots, A_n$ مستقل هستند اگر که

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdots \mathbb{P}[A_n]$$

متغیر تصادفی

$X : \Omega \to \mathbb{R}$



تابع X باید به گونه‌ای باشد که همه مجموعه‌های $A_x = \{w \mid X(w) \leq x\}$ $x \in \mathbb{R}$
عضوی از F باشند یعنی واقعه باشند.

متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته داریم و البته حالت کلی هم داریم

خروجی متغیر تصادفی یک مجموعه گسسته باشد.

تابع توزیع تجمعی:

$F_X(x) = \mathbb{P}[X(w) \leq x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$: \mathbb{R} \to [0,1]$

تابع توزیع تجمعی همه اطلاعات لازم را در مورد یک متغیر تصادفی به ما می‌دهد

خواص CDF :

① F نزولی نیست

② $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

③ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

④ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x)$

خواص CDF :

① F غیرکاهشی

② $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

③ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

④ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x)$

برای متغیرهای گسسته : (PMF) Prob. Mass Func.

$$P_X(x) = \mathbb{P}[X=x]$$

تابع چگالی احتمال (pdf) : prob. density func.

متغیر تصادفی پیوسته : تابع CDF پیوسته باشد و درجایی مشتق داشته باشد.

برای متغیر تصادفی پیوسته اگر F_X مشتق پذیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

خواص:

① $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$

③ $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) \cdot dx$

④ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{P}[x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon] = 2\varepsilon \cdot f_X(x)$