تئوری اطلاعات ، جلسه ۹ : 3 آبان ۱۳۹۰

* مطالب امروز :

* مرور جلسه قبل

* نامساوی kraft

* کدهای بهینه prefix-free

کران پایین و بالا بر روی طول متوسط این کدها

* one-shot vs multi-shot Coding

* کدگذاری منبع: $C : \mathcal{X} \longrightarrow D^*$ Source Code

رشته های با طول متناهی از الفبای D

طول متوسط یک کد C برای متغیر تصادفی X :

$$\bar{L}(C) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \cdot l(x)$$

$$\forall x_1 \neq x_2 \rightarrow C(x_1) \neq C(x_2)$$ nonsingular *

: extension C^* of C *

$$C^*(x_1 \cdots x_n) = C(x_1) \cdots C(x_2)$$

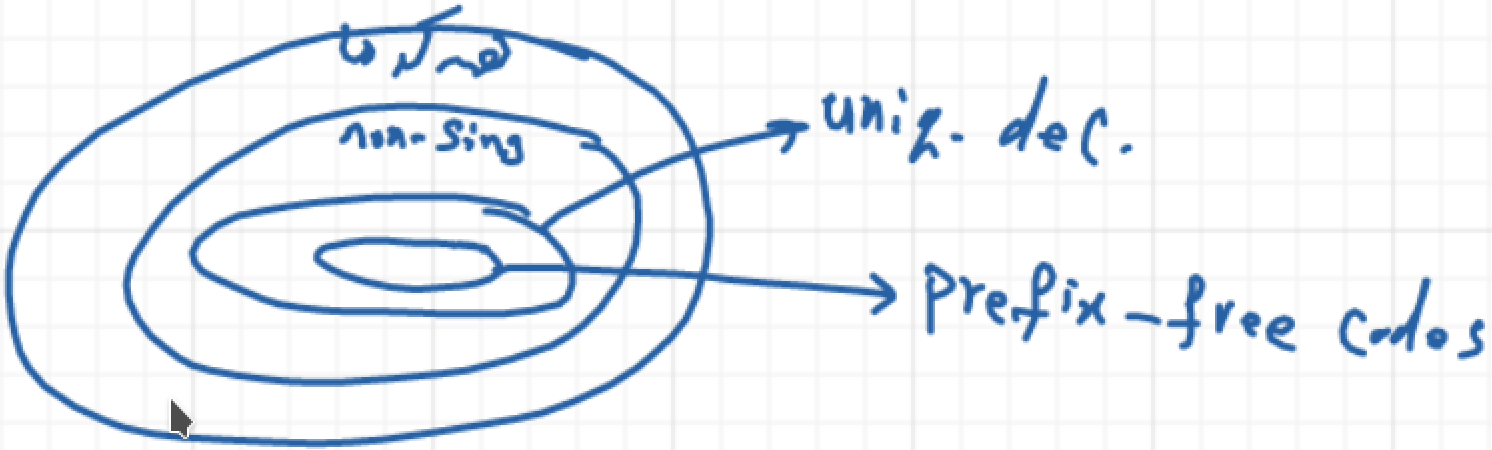
: uniquely decodable codes *

C^* be nonsingular

$$x_1 \cdots x_n \neq y_1 \cdots y_m \Rightarrow C(x_1) \cdots C(x_1) \neq C(y_1) \cdots C(y_n)$$

* کدهای لحظه‌ای یا instantaneous یا preefix-free یا prefix code

هیچ کدواژه‌ای زیررشته یک کدواژه دیگر نیست. $\Longleftarrow$ به طور لحظه‌ای می‌توانیم هر سمبل را دیکود کنیم.



* نامساوی kraft :

قضیه: برای هر کد لحظه‌ای که بر روی الفبای با اندازه D تعریف شده باشد

طول کدواژه‌ها $l_1 \dots l_m$ در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

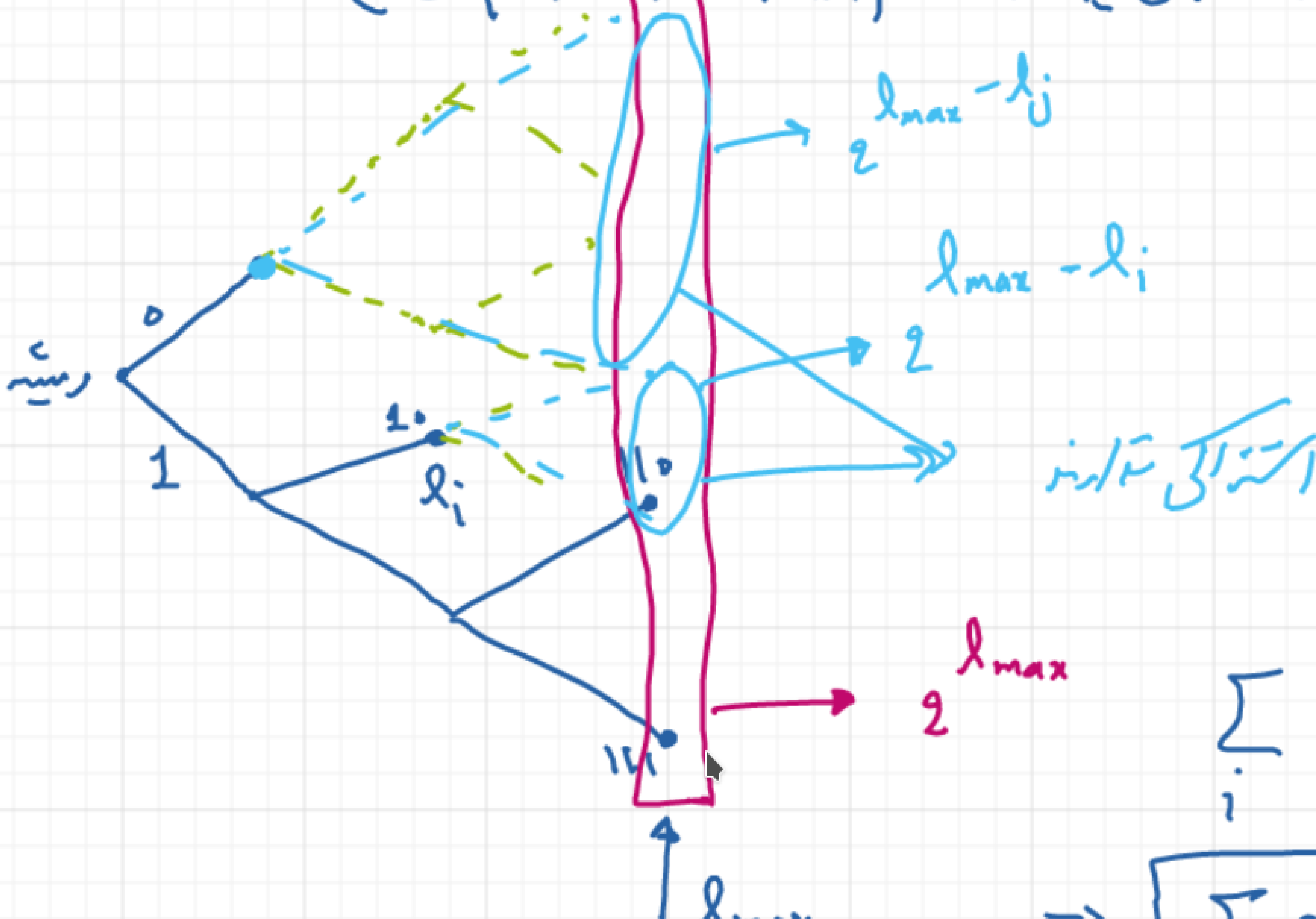
$$\sum_{i=1}^{m} D^{-l_i} \leq 1$$

به طور برعکس اگر یک دسته طول در نامساوی زیر صدق کنند ⟵ یک کد لحظه‌ای

با آن مجموعه طول وجود دارد.

اثبات:

مثال: $D=2$ ترمتی کینه کد $C = \{0, 10, 110, 111\}$



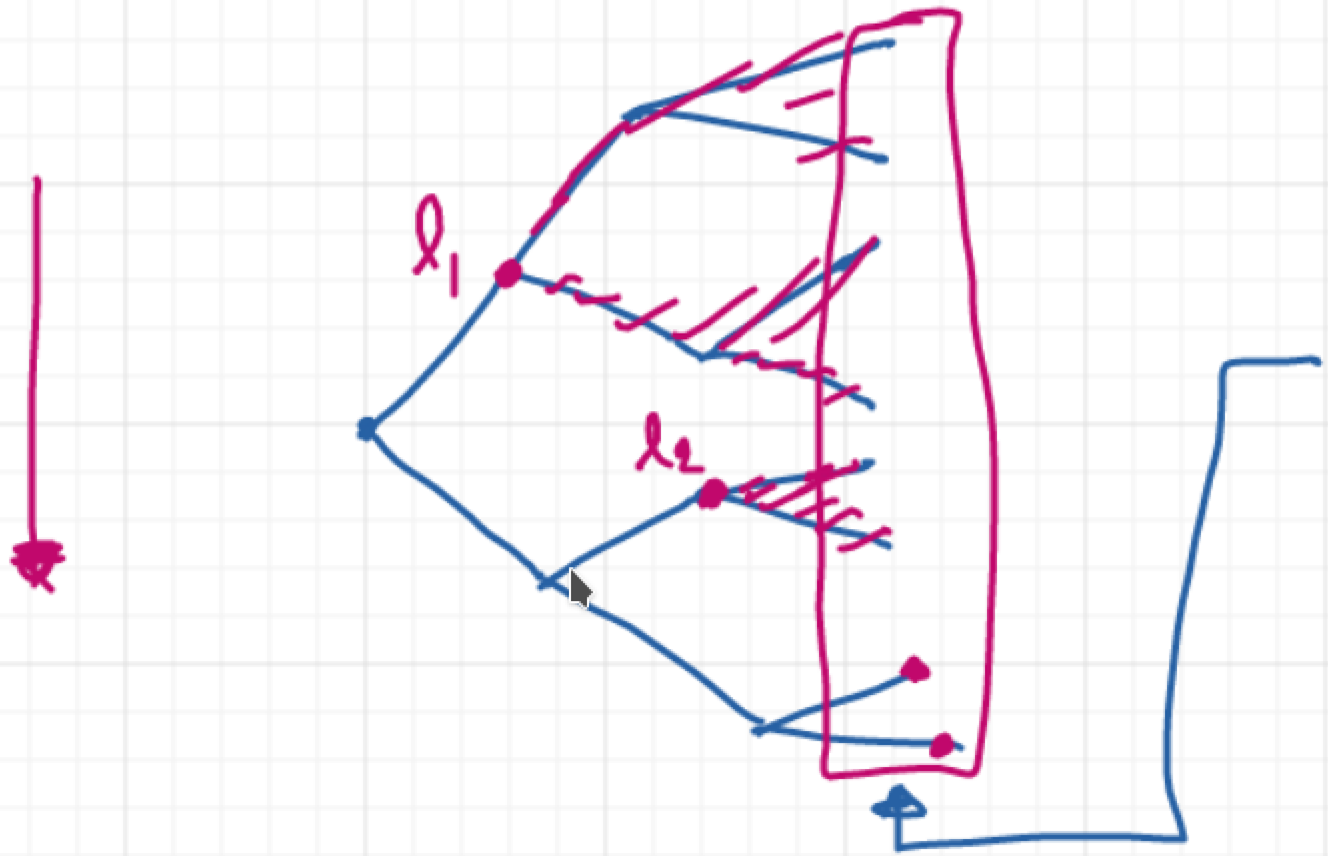
$$\sum_i 2^{l_{max}-l_i} \le 2^{l_{max}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i 2^{-l_i} \le 1}$$

در مورد عکس قضیه:

اگر $l_1 \dots l_m$ در $\sum_i D^{-l_i} \le 1$ صدق کند ⟵ یک کد لحظه‌ای با طول $l_1 \dots l_m$ داریم.

برای $D=2$. درخت باینری را رسم کنیم با طول $l_{max} = \max(l_1 \dots l_m)$



$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-l_i} \le 1$$

~~$l_1 = 1$~~

$l_2 = 2$

$l_3 = 3$

$l_4 = 3$

* قضیه: نسخه توسعه یافته کرافت: اگر تعداد کدواژه‌ها بی‌نهایت (ولی شمارا) هم باشند باز هم در نامساوی kraft صدق می‌کنند (به صورت اگر و فقط اگر):

$$\sum_{i=1}^{\infty} D^{-l_i} \le 1$$

$$\bar{L}(C) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot l(x)$$ ← حالا به روی کدهای لحظه‌ای تمرکز کنیم .

کد با کمترین متوسط طول از بین کدهای لحظه‌ای :

$$\bar{L}_{opt} = \min_{C \in \text{preefix-free}} \bar{L}(C)$$

به این پارامتر علاقمند هستیم .

* کران پایین برای $\bar{L}_{opt}$

$$\bar{L}_{opt} = \min_{C \in \text{preefix free}} \sum_x p(x)\, l(x)$$

$$= \min_{\{l(x)\}} \sum p(x)\, l(x)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_x D^{-l(x)} \leq 1 \\ l(x) \in \mathbb{N} \end{cases} \Longleftrightarrow C \text{ is prefix free}$$

$q(x) = D^{-l(x)}$

$$= \min_{\{q(x)\}} \left[-\sum_x p(x) \cdot \log_D q(x) \right]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_x q(x) \leq 1 \\ q(x) \in \left\{ \frac{1}{D}, \frac{1}{D^2}, \cdots \right\} \end{cases}$$

$$\geqslant \underbrace{\min_{\{q(x)\}} \left[- \sum_x p(x) \log_D q(x) \right] \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_x q(x) \leqslant 1 \\ q(x) \geqslant 0 \end{cases}}_{= A}$$

$$\underbrace{\min_{\{q(x)\}} \left[- \sum_x p(x) \log_D q(x) \right] \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_x q(x) = 1 \\ q(x) \geqslant 0 \end{cases}}_{= B}$$

[illegible]

$\Rightarrow \quad A \leq B$ ✓

$0 \leq C(q) \leq 1$ → kraf ineq.

از طرفی: مقدار ثابت $\overbrace{C(q) \triangleq \sum_x q(x)}^{0 \leq C(q) \leq 1}$ را در نظر می‌گیریم.

یک تغییر متغیر جدید $\rightarrow \quad q'(x) = \dfrac{q(x)}{C(q)} \quad \rightarrow \quad \sum_x q'(x) = 1$

$$A = \min_{\{q'(x)\}} \left[\cancel{-\log_D c(q)} - \underbrace{\sum_x p(x) \log_D q'(x)}_{-\sum_x p(x) \log_D q(x) + \cancel{\sum_x p(x) \log_D c(q)}} \right]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum q'(x) = 1 \\ q'(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\geq B = \min_{\{q(x)\}} \left[-\sum_x p(x) \log_D q(x) \right]$$

$$\text{s.t.} \left. \begin{cases} \sum q(x) = 1 \\ q(x) \geq 0 \end{cases} \right\} \Longrightarrow$$

$q(x)$ یک توزیع است.

$$\Longrightarrow A = B \Longrightarrow \bar{L}_{opt} \geq B$$

$$\left.\begin{aligned} B = \min_{\{q(x)\}} & \left[\overbrace{D_{KL}(p \,\|\, q)}^{\geq 0} + H_D(x)\right] \\ \text{s.t.} & \begin{cases}\sum q(x)=1\\ q(x)\geq 0\end{cases}\end{aligned}\right\} \geq H_D(x)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L}_{opt} \geq H_D(x)$$

* شرط تساوی : $D(P\|Q)=0 \iff l(x) = \underbrace{-\log_D P(x)}_{\text{صحیح باشد}}$

$\iff P(x) \in \left\{ \frac{1}{D}, \frac{1}{D^2}, \dots \right\}$