

* هر در خط قبل

* که آن بالا برای طول متوسط بهترین که prefix-free (\bar{L}_{opt})

* چگونه به فشرده سازی به اندازه آنتروپی منبع برسیم

* نامی Kraft ϵ ای $uniquely\ decodable\ Codes$

* م فی کرمیل Huffman

هر در خط قبل :

$$\bar{L}(C) \triangleq \sum_{x \in X} p(x) l(x)$$

↑ یک کرمیل لفظی

$$\bar{L}_{opt} = \min_{C \in \text{prefix-free}} \bar{L}(C)$$

ترتیب نامی Kraft توصیف می کند.

$$\Rightarrow H_D(X) \leq \bar{L}_{opt} \leq \bar{L}(C)$$

* که آن بالا برای \bar{L}_{opt} :

یک که C را در نظر بگیریم $\bar{L}(C) \leftarrow$

$$\bar{L}_{opt} \leq \bar{L}(C)$$

به صحت بنظر که Shannon-Fano را در نظر بگیریم :
اگر یک تغییر مقادیر X با توزیع $P(x)$ داریم . طول کدواره تا را به صورت
ترتیب انتخاب می کنیم :

$$l(x) = \left\lceil \log_D \frac{1}{P(x)} \right\rceil : \forall x \in X$$

این چگونه طول $l(x)$ ها در نامی Kraft
صورت می گند :

$$\sum_{x \in X} D^{-l(x)} = \sum_{x \in X} D^{-\left\lceil \log_D \frac{1}{P(x)} \right\rceil} \leq \sum_{x \in X} D^{-\log_D \frac{1}{P(x)}} = \sum_{x \in X} P(x) = 1$$

$$h_D \frac{1}{P(x)} \leq \lceil h_D \frac{1}{P(x)} \rceil < h_D \frac{1}{P(x)} + 1$$

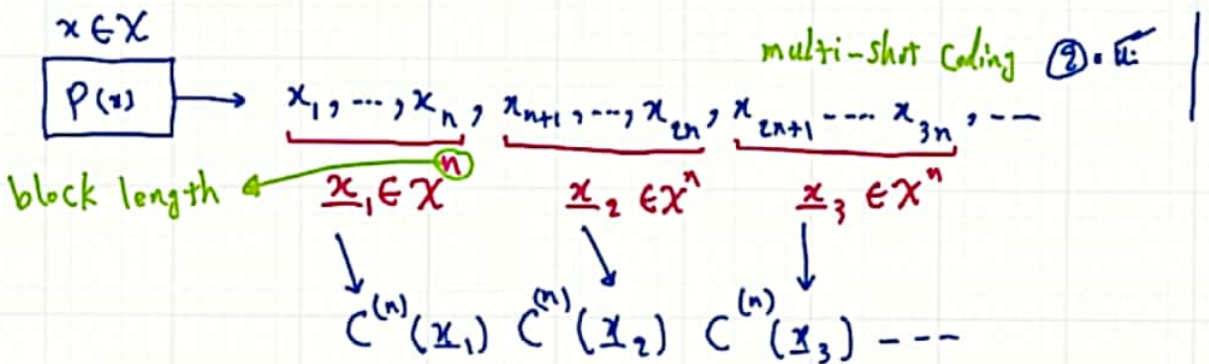
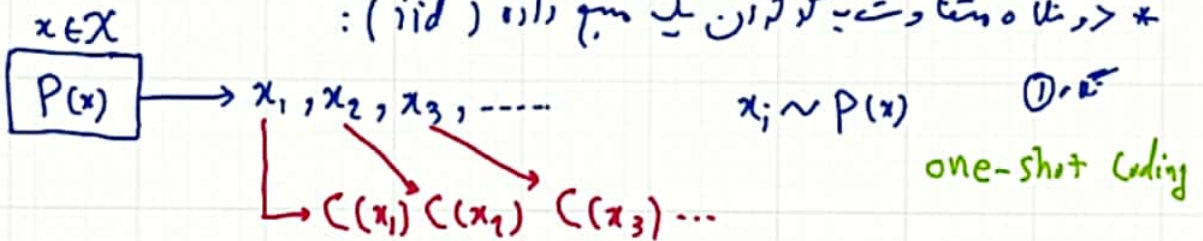
$$\xrightarrow{xP(x)} \sum H_D(x) \leq \bar{L}_{\text{Shannon-Fano}} < H_D(x) + 1$$

تعداد هم نشان داده می‌شود.

$$\Rightarrow H_D(x) \leq \bar{L}_{\text{opt}} \leq \bar{L}_{\text{Shannon-Fano}} < H_D(x) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{H_D(x) \leq \bar{L}_{\text{opt}} < H_D(x) + 1}$$

* در نتایج و دست‌یابی که هر ان یک منبع داده (iid) :



$$H_D(x_1, \dots, x_n) \leq \bar{L}_{\text{opt}}^{(n)} < H_D(x_1, \dots, x_n) + 1$$

نکته 2 :

$$\Rightarrow n H_D(x) \leq \bar{L}_{\text{opt}}^{(n)} < n H_D(x) + 1$$

$$\Rightarrow H_D(x) \leq \frac{1}{n} \bar{L}_{\text{opt}}^{(n)} < H_D(x) + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H_D(x)$$

طول متوسط معرفی به ازای هر کابل ورودی

این اثبات معنی فشرده سازی می‌کنون

$X \sim \text{Bernulli}(0.9)$

دستاره داخل برانته :

$P(X=0) = 0.1$

$P(X=1) = 0.9$

$(X_1, \dots, X_n) \in X^n$

تعداد رشته‌های ممکن: 2^n

ولی در واقع اکثر رشته‌هایی که از این منبع تولید می‌شوند آنتروپی هستند که تقریباً $\frac{n}{10}$ صفر دارند و $\frac{9n}{10}$ یک دارند. ← رشته‌های نوبی (typical seq.)

پسند مثال : فرض کنید $X = \{A, B, C\}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$D = \{0, 1\}$ و

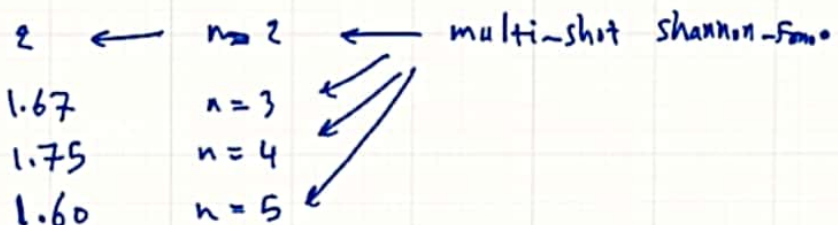
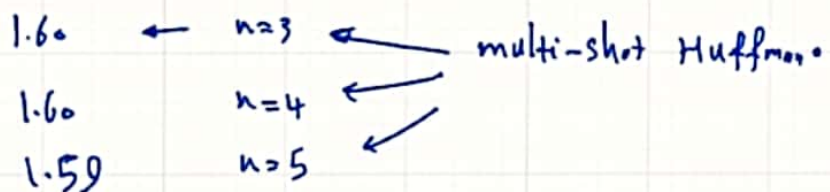
$H(X) \approx 1.58$ ←

کد شانون-فانو : $l(x) = \lceil \log_2 \frac{1}{P(x)} \rceil$ ← $C_{SF} = \{00, 01, 10\}$
 → $L_{SF} = 2$

کد Huffman : $C_{Huff} = \{0, 10, 11\}$ ← $L_{Huff} = 1.67$

کد Huffman باقی‌مانده با $n=2$: $X^2 = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$ → $C_{Huff}^{(2)} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

⇒ $L_{Huff}^{(2)} = 1.61$



* مثالان تکرار معظ بررسی کردی لطفاً بیود.

* اثبات نامساوی Kraft برای کد های باینری دیگر دیکوئونه.

قضیه: مجموعه طول های یک کد باینری دیگر دیکوئونه D-ary در نامساوی زیر صدق می کند.

$$\sum_{x \in X} D^{-l(x)} \leq 1$$

رابطه معکوس هر چیزی طولی که در این نامساوی صدق کند متناظر با یک کد باینری دیگر دیکوئونه است.

اثبات: Input $x_1, \dots, x_n \rightarrow C(x_1), \dots, C(x_n)$

$x_1, \dots, x_n \neq y_1, \dots, y_m \rightarrow C(x_1), \dots, C(x_n) \neq C(y_1), \dots, C(y_m)$

$$A \triangleq \sum_{x \in X} D^{-l(x)}$$

$$A^r = \left(\sum_{x_1 \in X} D^{-l(x_1)} \right) \left(\sum_{x_2 \in X} D^{-l(x_2)} \right) \dots \left(\sum_{x_r \in X} D^{-l(x_r)} \right)$$

$$= \sum_{x_1, \dots, x_r \in X^r} D^{-l(x_1)} \dots D^{-l(x_r)}$$

$$= \sum_{x \in X^r} D^{-l(x)} \rightarrow = l(x_1) + \dots + l(x_r)$$

$$= \sum_{i=1}^{r \cdot l_{\max}} a(i) D^{-i}$$

$$l_{\max} = \max_{x \in X} l(x)$$

تعداد رشته های بین $x \in X^r$ که به یک رشته i طول i در ترمینال تک رشته شده است.

ی دانیم رشته‌های D^i هم طول و هم اندازه D^i هستند. $\leftarrow a(i) \leq D^i$

$$\Rightarrow A^r = \sum_{i=1}^{r \cdot l_{\max}} a(i) D^{-i} \leq \sum_{i=1}^{r \cdot l_{\max}} D^i \cdot D^{-i} = r \cdot l_{\max}$$

$$\Rightarrow A \leq \underbrace{(r \cdot l_{\max})^{\frac{1}{r}}}_{r \rightarrow \infty \rightarrow 1} : \forall r \geq 1$$

$$\Rightarrow A \leq 1 \quad \checkmark \text{ نامی که گفت برای هر کدام یکی از اینها}$$

دافل برانته:

$$\alpha = (r \cdot l_{\max})^{\frac{1}{r}}$$

$$\rightarrow \ln \alpha = \frac{1}{r} [\ln r + \ln l_{\max}] \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \alpha \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$$