## تئوری اطلاعات : جلسه 12 ، شنبه 99/8/10

مباحث امروز :

* کد هافمن
* نکاتی درباره کد هافمن
* اثبات بهینه بودن کد هافمن

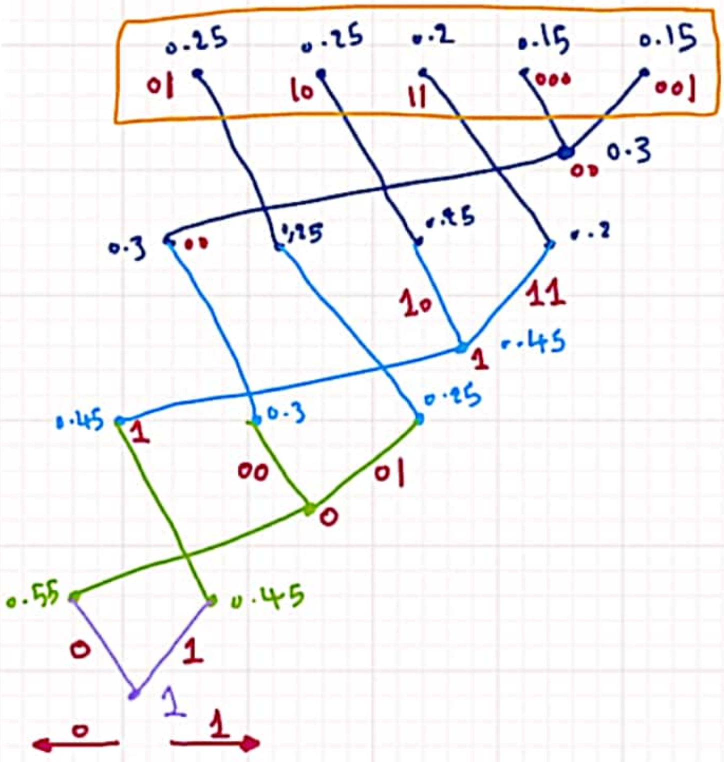
با یک مثال شروع کنیم :

مثال 1 : $X = \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow D = \{0,1\}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prob | 0.25 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.15 |

: $m = |X| = 5$

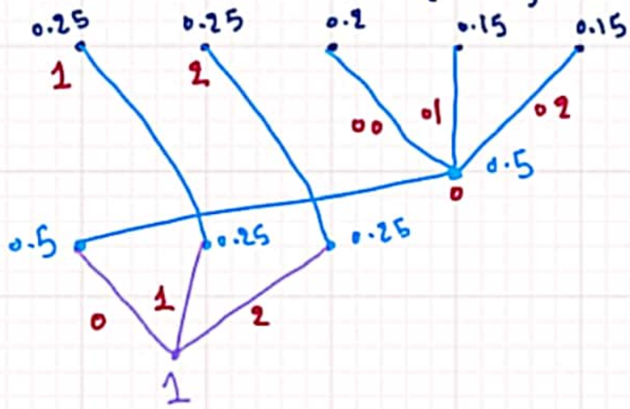





| x | | |
|---|---|---|
| 1 | $\longrightarrow$ 01 | : 0.25 |
| 2 | $\longrightarrow$ 10 | : 0.25 |
| 3 | $\longrightarrow$ 11 | : 0.2 |
| 4 | $\longrightarrow$ 000 | : 0.15 |
| 5 | $\longrightarrow$ 001 | : 0.15 |

$\bar{L} = 2.3$ bit

مثال 2 : همان منبع بالا ولی $D = \{0,1,2\}$




| x | $D^*$ |
|---|---|
| 1 $\longrightarrow$ | 1 |
| 2 $\longrightarrow$ | 2 |
| 3 $\longrightarrow$ | 00 |
| 4 $\longrightarrow$ | 01 |
| 5 $\longrightarrow$ | 02 |

نکته: برای وقتی که $D \geq 3$ ← برای اینکه الگوریتم هافمن کار کند
تعداد سمبل ها $(m = |X|)$ باید به شکل

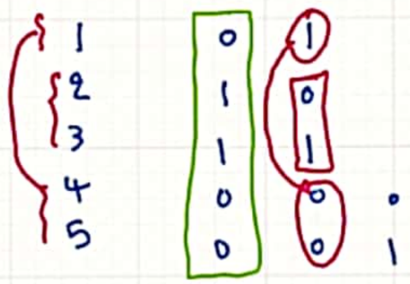
$$m = 1 + K(D-1)$$

باشد.

اگر m به شکل فوق نبود تعدادی سمبل با احتمال صفر به $X$ اضافه می کنیم تا
الگوریتم هافمن کار کند و در نهایت از آنها صرف نظر می کنیم.

نکته: مسئله ۲۰ سوالی برای پیدا کردن یک شی از یک مجموعه اشیاء $X$.
به طور متوسط کمترین تعداد سوال را بپرسیم.
سوال ها هر به شکل این است که آیا $x \overset{?}{\in} A \subseteq X$.
با فرض اینکه توزیع احتمال شی مورد نظر از $X$ را داشتیم.

هر کد معادل یک دنباله سوال:
مثال:
uniqely decodable



* دنباله سوال ها هر شی را به صورت یکتا مشخص می کنند ← دنباله پاسخ های بله و خیر
← تبدیل به دنباله ای از ۰ و ۱ ها

* نکته: مقایسه کد هافمن و کد Shannon:
کد شانون هر سمبل i ام طول $\lceil \lg \frac{1}{p_i} \rceil$

مثال: $X = \{1, 2\}$ ← طول نسبت داده شده به 1 : 1 بیت
$0.0001$ ← $0.9999$ ← طول ------- 2 : 14 بیت

ولی کد بهینه: $1 \to 0$ ، $2 \to 1$ } طول هر دو یک است.

مثال: مقایسه هافمن با شنون:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{12}$

$\xrightarrow{\text{کد هافمن}}$

① $l: (2, 2, 2, 2) \rightarrow \bar{L} = 2$

② $l: (1, 2, 3, 3) \rightarrow \bar{L} = 2$

$\rightarrow l(3) = 3$

$l_{\text{Shannon}}(3) = 2$

---

* بهینه بودن کد هافمن:

فرض: $m = |X|$ و $P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_m$

لم: برای هر توزیع بر روی $X$ موارد زیر را داریم:

① برای هر کد بهینه اگر که $P_j > P_k \Rightarrow l_j \leq l_k$

② در هر کد بهینه‌ای لحظه‌ای دو کدواژه طولانی‌تر هم‌طول هستند.

③ یک کد بهینه‌ای وجود دارد که دو کدواژه طولانی‌تر فقط در بیت آخر تفاوت دارند. و دو کدواژه طولانی‌تر هم مربوط به دو سمبل کم احتمال هستند.

نتیجه ① $\leftarrow$ اگر $P_1 \geq \dots \geq P_m \Leftarrow l_1 \leq \dots \leq l_m$

حل: ① اگر $P_j > P_k$ فرض خلف می‌کنیم که $l_j > l_k$ باشد.

از روی کد اول $(C_m)$ یک کد جدید $C'_m$ می‌سازیم که جای سمبل j و k عوض شده باشد:

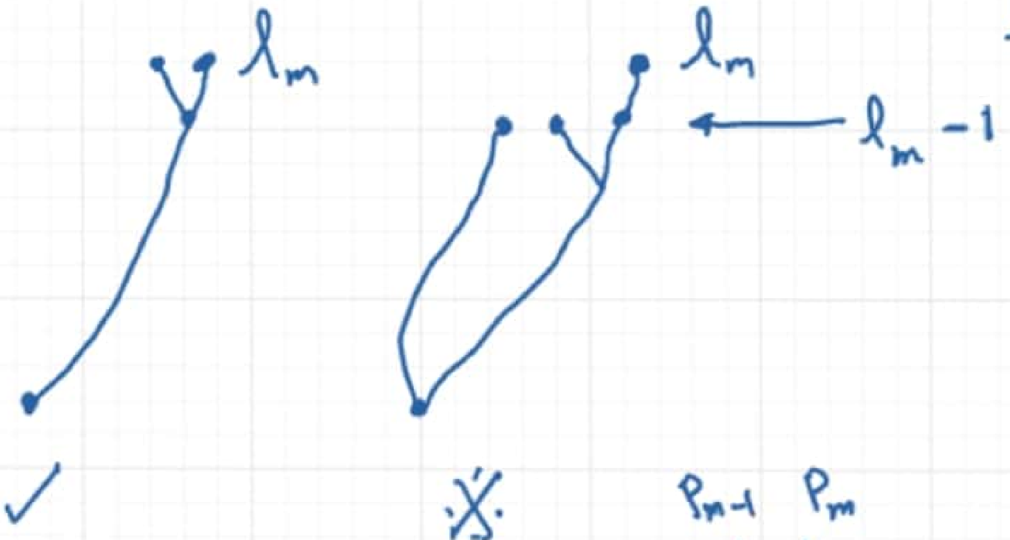
$$\underbrace{\bar{L}(C'_m) - \bar{L}(\overset{\text{کد بهینه}}{C_m})}_{\geq 0} = \sum_{i=1}^{m} P_i l'_i - \sum_{i=1}^{m} P_i l_i$$

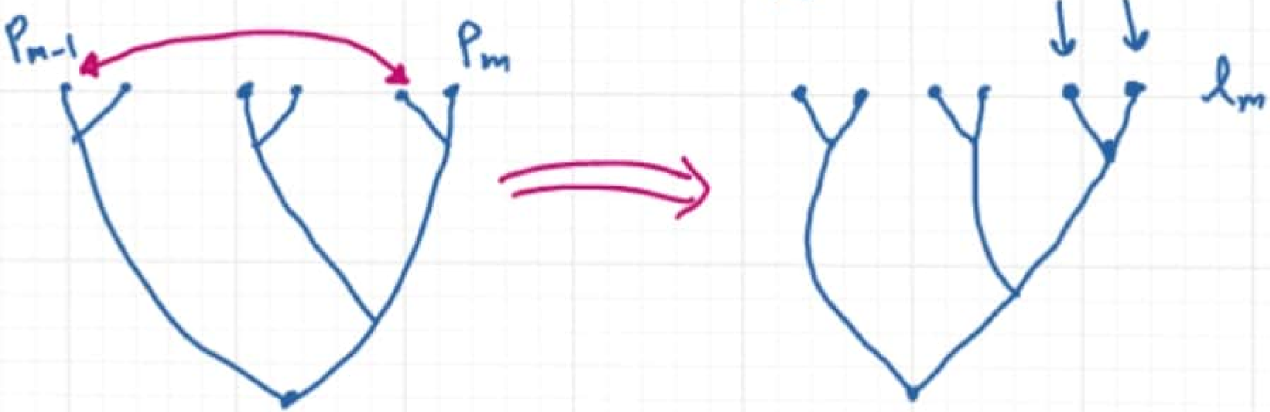
$$= P_j l_k + P_k l_j - P_j l_j - P_k l_k$$

$$= \underbrace{(P_j - P_k)}_{>0}\underbrace{(l_k - l_j)}_{} \Longrightarrow \geq 0 \quad ※$$

حل ② : از یک می‌توانیم نتیجه بگیریم : $l_1 \le l_2 \le \dots \le l_{m-1} \le l_m$

فرض خلف : $l_{m-1} < l_m$




③