تئوری اطلاعات : جلسه 13 ، 24 آبان 1399

* معرفی مجموعه های نوعی (typical set)

* خواص مجموعه های نوعی

* اثبات قضیه فشرده سازی منبع با استفاده از مجموعه های نوعی

* اثبات خواص مجموعه های نوعی

* تعبیر AEP: اگر $X_1 \cdots X_n \overset{iid}{\sim} P(x)$

$$-\frac{1}{n}\log P(X_1 \cdots X_n) \xrightarrow{n\to\infty} H(X) \quad \text{in prob.}$$

(weak AEP)

$$\boxed{\begin{aligned} &P(x) = \mathbb{P}[X = x] \\ &P(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P(x_1)\cdots P(x_n) \end{aligned}}$$

یعنی: به ازای هر ε و هر δ یک n_0 وجود دارد که برای $n > n_0$ داریم:

$$\mathbb{P}\left[\left|-\frac{1}{n}\log P(X_1 \cdots X_n) - H(X)\right| > \varepsilon\right] < \delta$$

با توجه به مطلب بالا مجموعه شولی $A_\varepsilon^{(n)}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم (typical set):

$$A_\varepsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n : \underbrace{2^{-n(H(X)+\varepsilon)} \leq P(x_1, \dots, x_n) \leq 2^{-n(H(X)-\varepsilon)}}_{} \right\}$$

$\log$

خواص مجموعه های شولی:

① اگر $(x_1, \dots, x_n) \in A_\varepsilon^{(n)}$ آنگاه:

$$H(X) - \varepsilon \leq -\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n) \leq H(X) + \varepsilon$$

$$\boxed{(X_1, \dots, X_n) \overset{iid}{\sim} P(x)}$$

② برای n های به اندازه کافی بزرگ
و برای هر $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left[(X_1, \dots, X_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right] \geq 1 - \varepsilon$$

3 برای هر n داریم:

$$|A_\epsilon^{(n)}| \le 2^{n(H(X)+\epsilon)}$$

4 برای n های به اندازه کافی بزرگ:

$$|A_\epsilon^{(n)}| \ge (1-\epsilon)\, 2^{n(H(X)-\epsilon)}$$

یکی از نتایج مهم AEP: اثبات قضیه فشرده سازی منبع:

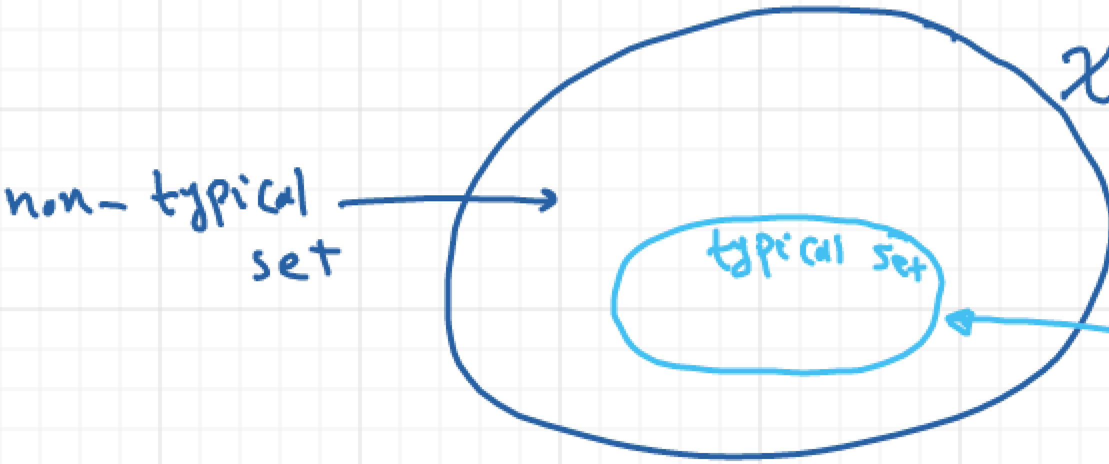
$$\boxed{P(X)} \xrightarrow{iid} X$$

* از جلسات قبل می دانیم:

$$H(X) \le \bar{L}_{opt}$$

* می خواهیم نشان دهیم کدی وجود دارد که به هر فشرده سازی $H(X)$ به ازای هر قابل دسترس

* می‌خواهیم نشان دهیم کدی وجود دارد که به فشرده‌سازی $H(X)$ به ازای هر سمبل برسد



$\mathcal{X}^n : |\mathcal{X}|^n$ sequence

$A_\epsilon^{(n)} : 2^{n(H(X)+\epsilon)}$ حداکثر رشته دارد.

یک روش کد کردن:

اگر رشته منشاء مشاهده شده به طول n :

① $x \in A_\epsilon^{(n)} \longrightarrow 2^{n(H(X)+\epsilon)}$ حداکثر $A_\epsilon^{(n)}$

$\Rightarrow$ حداکثر به $n(H(X)+\epsilon)+1$ بیت برای کد کردن این رشته نیاز داریم.

② $x \notin A_\epsilon^{(n)} \longrightarrow$ حداکثر $n\log_2|\mathcal{X}|+1$ بیت نیاز داریم

برای کد کردن: اگر $\underline{x}$ توی بود ابتدای رشته یک "0" اضافه می‌کنیم.

(کد C): اگر $\underline{x}$ توی نبود ---- "1" ----.

تحلیل طول متوسط کد C:

$$\bar{L}_C = \mathbb{E}[\ell(\underline{x})] = \sum_{\underline{x}\in\mathcal{X}^n} P(\underline{x})\cdot\ell(\underline{x})$$

$$= \sum_{x\in A_\varepsilon^{(n)}} P(\underline{x})\ell(\underline{x}) + \sum_{x\notin A_\varepsilon^{(n)}} P(\underline{x})\ell(\underline{x})$$

طبق خاصیت ۲

$$\leq \underbrace{\mathbb{P}[A_\varepsilon^{(n)}]}_{\underline{X}\in A_\varepsilon^{(n)}}\cdot\big(n(H(X)+\varepsilon)+2\big) + \overbrace{\big(1-\mathbb{P}[A_\varepsilon^{(n)}]\big)}^{\leq\varepsilon} \times \big(n\lg|\mathcal{X}|+2\big)$$

$$\leq 1\cdot\big(n(H(X)+\varepsilon)+2\big) + \varepsilon\big(n\lg|\mathcal{X}|+2\big)$$

$$\leq 1 \cdot \left(n(H(X)+\varepsilon)+2 \right) + \varepsilon \left(n \lg |X| + 2 \right)$$

$$= n\left(H(X) + \varepsilon' \right) \quad : \quad \varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon \lg |X| + \frac{2}{n} + \frac{2\varepsilon}{n}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} nH(X)$$

اثبات خواص مجموعه نوعی :

خاصیت ① : بدیهی

خاصیت ② : مستقیما AEP بیان می‌کرد :

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{\left| -\frac{1}{n} \log P(X_1 \cdots X_n) - H(X) \right| < \varepsilon}_{\downarrow} \right] > 1 - \delta$$

حال می‌توانیم قرار دهیم $\delta = \varepsilon$ ←

$$\mathbb{P}\left[(X_1 \cdots X_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right] > 1 - \varepsilon$$

خاصیت ③ : برای هر n :

$$|A_\varepsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(X)+\varepsilon)}$$

خاصیت 3 : برای هر n :

$$|A_\varepsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(X)+\varepsilon)}$$

اثبات :

$$1 = \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}^n} P(\underline{x}) \geq \sum_{\underline{x} \in A_\varepsilon^{(n)}} P(\underline{x})$$

خاصیت 1

$$\geq \sum_{\underline{x} \in A_\varepsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)+\varepsilon)}$$

$$= |A_\varepsilon^{(n)}| \cdot 2^{-n(H(X)+\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \quad |A_\varepsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(X)+\varepsilon)}$$

$$|A_\varepsilon^{(n)}| \geq (1-\varepsilon)\, 2^{n(H(X)-\varepsilon)}$$

قضیه ۲: برای n های به اندازه کافی بزرگ

اثبات:

از قضیه ۲ برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$1-\varepsilon \leq \mathbb{P}[A_\varepsilon^{(n)}] = \sum_{\underline{x} \in A_\varepsilon^{(n)}} P(\underline{x})$$

قضیه 1

$$\leq \sum_{\underline{x} \in A_\varepsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)-\varepsilon)}$$

$$= |A_\varepsilon^{(n)}| \cdot 2^{-n(H(X)-\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \quad |A_\varepsilon^{(n)}| \geq (1-\varepsilon) \cdot 2^{n(H(X)-\varepsilon)}$$

✓