تئوری اطلاعات : جلسه 14 ، 26 آبان 1392

* فرایندهای تصادفی ایستا
* نرخ آنتروپی (entropy rate) برای یک فرایند تصادفی
* نرخ آنتروپی فرایندهای ایستا
* مثال زنجیره مارکف

مطالب جلسات قبل

$$\boxed{\text{Source}} \xrightarrow[\sim P_X(x)]{\text{iid}} X_1, X_2, \dots \quad \overset{C}{\boxed{\text{Comp.}}} \longrightarrow Y_1, Y_2, \dots$$

$$\bar{L}_C \xrightarrow[n\to\infty]{} H(X)$$

* فرایند های تصادفی زمان گسسته : یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی

$$\{X_i\} = (X_1, X_2, X_3, \dots)$$

متغیرهای گسسته

اندیسها گسسته اند

توصیف یک فرایند تصادفی :

$$P(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$\forall n, \ \forall x_1, \dots, x_n$ داشته باشیم

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i) \longleftarrow X_i \overset{iid}{\sim} P(x)$$ مثال : اگر

* فرایندهای تصادفی ایستا (Stationary proc.) :

خواص آماری فرایند با زمان تغییر نمی‌کند .

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{l+1} = x_1, X_{l+2} = x_2, \dots, X_{l+n} = x_n]$$

$$\forall l, \ \forall n, \ \forall x_1, \dots, x_n$$

مثال از ولگشت (random walk :

Y_i: iid Bern(p) $\longrightarrow$ $\begin{cases} \mathbb{P}[Y_i=1]=p \\ \mathbb{P}[Y_i=-1]=1-p \end{cases}$

$\{X_i\}$: $\quad X_n = X_{n-1} + Y_n$

آیا این فرایند ایستا هست؟ در حالت کلی ایستا نیست.

برای $p=1/2$ چطور؟

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n-1}] + \overbrace{\mathbb{E}[Y_n]}^{=0} = 0 \\ \mathrm{Var}[X_n] = \mathrm{Var}[X_{n-1}] + \underbrace{\mathrm{Var}[Y_n]}_{=1} = n \end{cases}$$

* نرخ آنتروپی یک فرایند تصادفی :

$$H(\mathcal{X}) \triangleq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n)$$

اگر که این حد وجود داشته باشد.

مثال : $\{X_i\} \overset{iid}{\sim} P_X$ برای نرخ آنتروپی داریم

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big[H(X_1) + \underbrace{H(X_2 | X_1)}_{H(X_2)} + \dots + \underbrace{H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})}_{H(X_n)} \Big]$$

$$= H(X_1)$$

مثال:

$$X_1 = X_2 = \cdots X_n = \cdots = X \sim P$$

$$H(X_1, \dots, X_n) = H(X_1) + \underbrace{H(X_2 \mid X_1)}_{=0} + \underbrace{H(X_3 \mid X_1, X_2)}_{=0} + \cdots$$

$$= H(X_1)$$

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(X_1) = 0$$

یک تعریف دیگر برای نرخ آنتروپی:

$$H'(X) = \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_1, \dots, X_{n-1})$$

(اگر این حد وجود داشته باشد)

قضیه: برای فرایندهای ایستای زمان گسسته هر دو تعریف های بالا وجود دارند و برابر هستند.

اثبات:

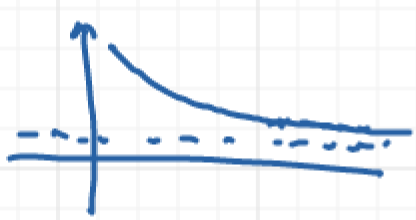
$$b_{n+1} = H(X_{n+1} \mid X_n, \dots, X_1) \overset{\text{حذف شرط}}{\leq} \underbrace{H(X_{n+1} \mid X_n, \dots, X_2)}_{\text{تابعی از } P_{X_{n+1}\cdots X_2}}$$

$$\overset{\text{ایستا بودن فرایند } \{X_i\}}{=} \underbrace{H(X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_1)}_{\text{تابعی از } P_{X_n\cdots X_1}} = b_n$$

برابر به علت ایستا بودن

b_n ها یک دنباله از اعداد هستند که غیر افزایشی هستند و از پایین کران دارند ($b_n \geq 0$).

در نتیجه دنباله b_n ها حد دارند.



بخش دوم: اثبات برابری $H(X)=H'(X)$

$$\frac{1}{n}H(X_1,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\Big[\underbrace{H(X_1)}_{b_1}+\underbrace{H(X_2|X_1)}_{b_2}+\dots+\underbrace{H(X_n|X_{n-1},\dots,X_1)}_{b_n}\Big]$$

$$\Rightarrow\quad H(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(X_1,\dots,X_n)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}b_n}_{\text{در بالا اثبات کردیم که وجود دارد}}=H'(X)$$

مراجعه به کتاب

یادآوری برای فشرده‌سازی منبع:

برای فشرده‌سازی منبع تولیدشده از متغیر تصادفی X با توزیع P_X:

$$H(X) \leqslant \bar{L}_{opt} < H(X)+1$$

همین استدلال بالا برای دنباله‌ای از سمبل‌ها به طول n:

$$\frac{1}{n}H(X_1,\dots,X_n) \leqslant \frac{\bar{L}_{opt}}{n} \leqslant \frac{1}{n}H(X_1,\dots,X_n)+\frac{1}{n}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\quad H(X) \leqslant \frac{\bar{L}_{opt}}{n} \leqslant H(X)$$

* یادآوری : زنجیره مارکف یک فرایند تصادفی است که

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1] = \mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

یک زنجیره مارکف مستقل از زمان است اگر که :

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=j \mid X_n = i] = \mathbb{P}[X_2 = j \mid X_1 = i]$$

← یک ماتریس گذار P :

$$P_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1}=j \mid X_n = i]$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{M} P_{ij} = 1$$

$$\Rightarrow \quad q_{k+1} = \underbrace{q_k}_{\text{احتمال انتخاب حالت‌ها در زمان } k} P = q_0 P^{k+1}$$

* توزیع ایستای زنجیره مارکوف :

$$\mu = \mu P$$

اگر زنجیره مارکوف غیرتناوبی و غیرکاهشی باشد آنگاه توزیع ایستای یکتا دارد.

$X_0 = \mu$ (با همان توزیع ایستای μ شروع می‌کنیم)

برای زنجیره مارکوف ایستا با توزیع ایستای یکتای μ نرخ آنتروپی را حساب کنیم :

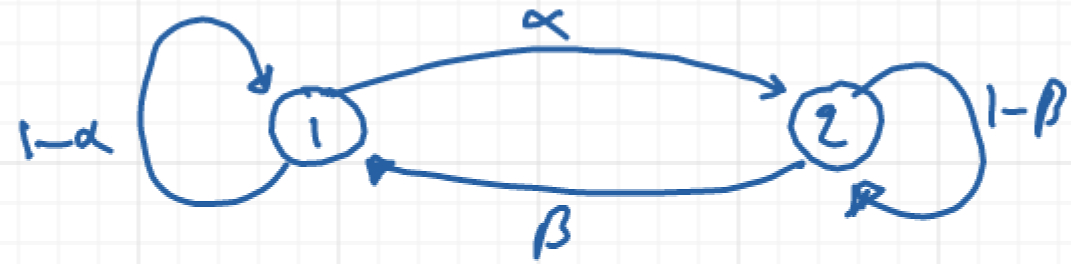
$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_1) = \lim_{n\to\infty} (X_n \mid X_{n-1})$$

$$= H(X_2 \mid X_1) = \sum_{i\in\mathcal{X}} \underbrace{H(X_2 \mid X_1 = i)}_{\sum_j -P_{ij}\log_2 P_{ij}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X_1 = i]}_{\mu_i}$$

$$\mu_1 \longrightarrow \mu = [\mu_1 \cdots \mu_M]$$

$$= \sum_{i,j\in\mathcal{X}} -\mu_i P_{ij} \log_2 P_{ij}$$

مثال:



$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\uparrow}{\mu} = \mu P \Rightarrow \mu = \left[\frac{\beta}{\alpha+\beta} , \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right]$$

Stationary dist.

آنتروپی کل:

$$* \quad H(X_n) = h_2(p) \quad : \quad p = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

نرخ آنتروپی این فرایند:

$$* \quad H(\mathcal{X}) = H(X_2 \mid X_1)$$

$$= \underbrace{H(X_2 \mid X_1 = 1)}_{h_2(\alpha)} \cdot \overbrace{\mathbb{P}[X_1 = 1]}^{= \frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \underbrace{H[X_2 \mid X_1 = 2]}_{h_2(\beta)} \cdot \overbrace{\mathbb{P}[X_2 = 2]}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$