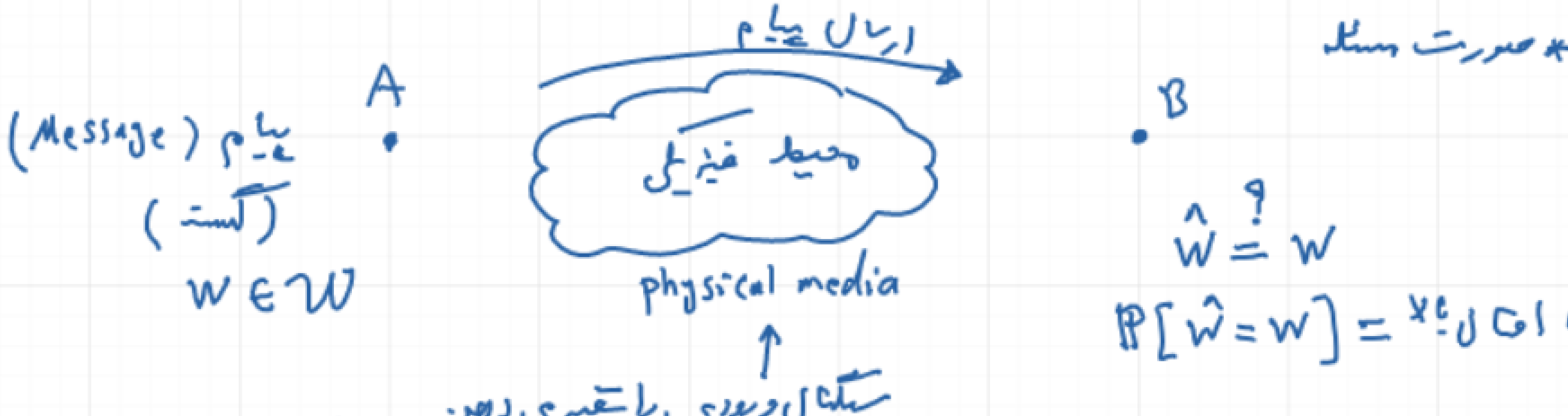
تئوری اطلاعات: جلسه 15 ، 1 آذر 99

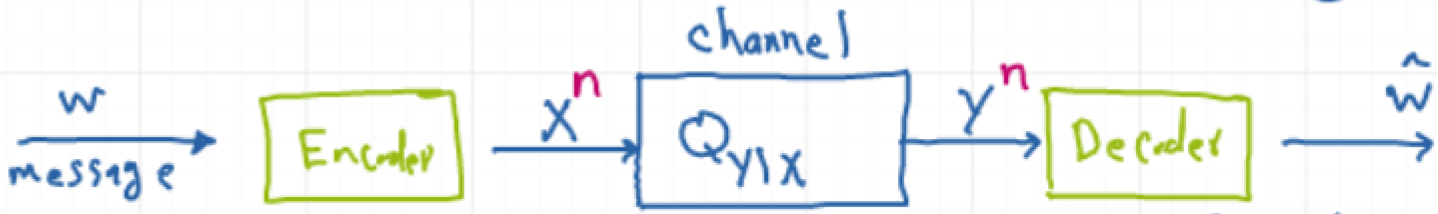
* آشنایی با مفهوم ظرفیت کانال (فصل 7 کتاب Cover)
  - مسئله انتقال داده بر روی کانال نویزی
  - کانال گسسته بدون حافظه
  - ظرفیت (اطلاعاتی) یک کانال

* صورت مسئله



یعنی تابع توزیع ازای تغییرات هم متفاوت هستند.

دقیق‌تر کردن مسئله :



$w \in \mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_M\}$

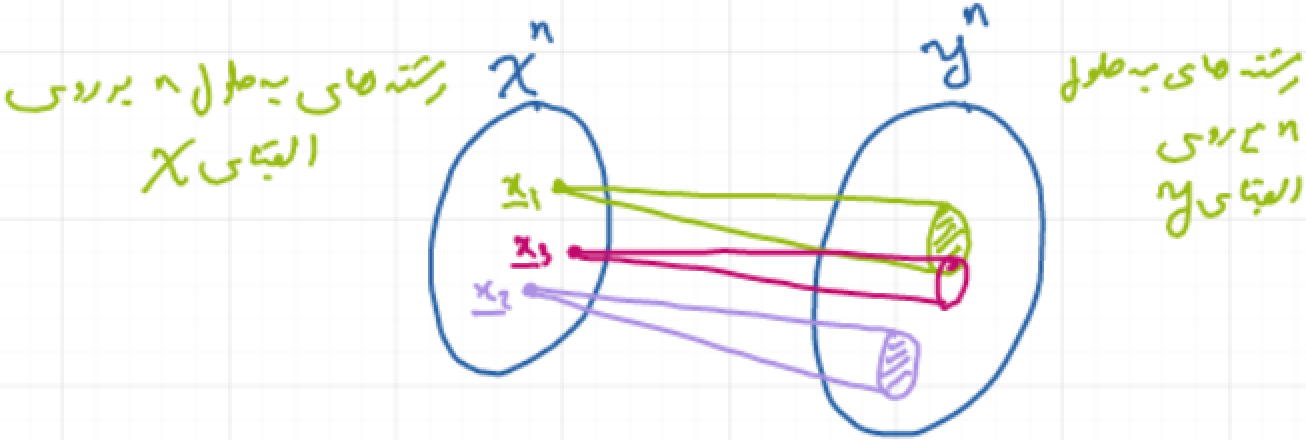
فرض : w و $\hat{w}$ و X و Y گسسته هستند

* تعریف (غیر دقیق) : بیشینه نرخ ارسال ⟵ ظرفیت کانال

$$C = \max_{(\text{enc}, \text{dec})} \frac{\log_2 |\mathcal{W}|}{n}$$

نرخ ارسال به ازای هر بار استفاده از کانال

* تعبیر شکلی :



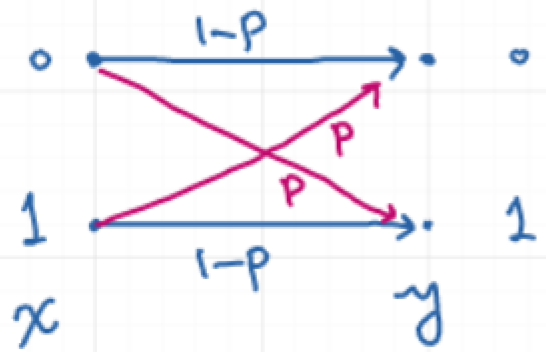
* تعریف (کانال گسسته): یک سیستم با الفبای ورودی $\mathcal{X}$ و الفبای خروجی $\mathcal{Y}$ که تابع احتمال شرطی $Q_{Y|X}$ خروجی را به ورودی ربط می‌دهد:

$$Q_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}[Y=y \mid X=x]$$

این احتمال شرطی را می‌توان توسط ماتریس گذار Q هم نمایش داد:

$$Q_{ij} = \mathbb{P}[Y=j \mid X=i]$$

* مثال: کانال باینری متقارن (Binary Symmetric channel): $BSC(p)$



$$Q = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_Y = Q\, P_X$$

* تعریف (کانال گسسته بدون حافظه) (Discrete Memoryless Channel) (DMC):

توزیع خروجی Y_K فقط به توزیع ورودی در همان لحظه (یعنی X_K) بستگی دارد
و از توزیع های ورودی های قبل یا خروجی های قبل مستقل است.

$$\mathbb{P}\left[Y_k=y_k \mid X_1=x_1,\dots,X_k=x_k,\ Y_1=y_1,\dots,Y_{k-1}=y_{k-1}\right]$$
$$=\mathbb{P}\left[Y_k=y_k \mid X_k=x_k\right]$$

---

* تعریف: ظرفیت (اطلاعاتی) یک کانال:

$$C_{info}=\max_{P_X} I(X;Y)=\max_{P_X}\sum_{x,y}P_{X,Y}(x,y)\log\frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)\cdot P_Y(y)}$$

$$P_{X,Y}(x,y)=\underline{P_X(x)}\cdot Q_{Y|X}(y|x)$$

$\cap$

• نکته مهم: اگر $Q_{Y|X}$ ثابت باشد، آنگاه $I(X;Y)$ یک تابع مقعر از P_X است.

* نکته: دوگانگی بین فشرده‌سازی و مسئله ارسال بر روی کانال نویزی

• فشرده‌سازی منبع: هدف حذف افزونگی تا جای ممکن

• ارسال بر روی کانال نویزی: با اضافه کردن افزونگی سعی می‌کنیم بر نویز غلبه کنیم.

مثال: کد همینگ $(7,4)$:

$$b_1 b_2 b_3 b_4 \in \mathcal{X}^4 \longrightarrow \boxed{\text{Encoder}} \longrightarrow \in \mathcal{X}^7$$

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$

$$\to b_1 b_2 b_3 b_4 \, r_1 \, r_2 \, r_3$$

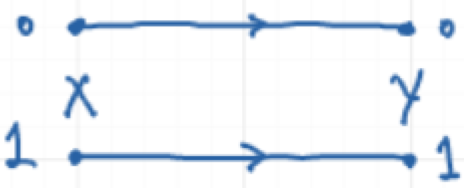
$r_1 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4$

$r_2 = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4$

$r_3 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4$

* مثال ظرفیت کانال :

مثال 1: کانال باینری بدون نویز:

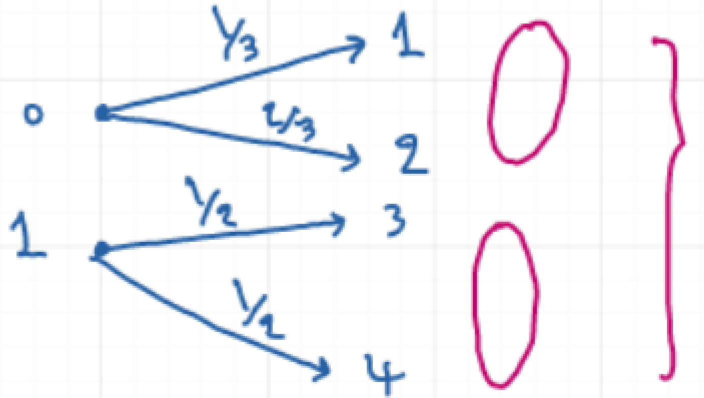


$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} \left[H(Y) - \cancelto{0}{H(Y|X)} \right]$$

$$= \max_{P_X} H(Y) = \max_{P_X} H(X) = 1 \text{ bit/channel use}$$

توزیع یکنواخت بر روی X: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

مثال ۲ :

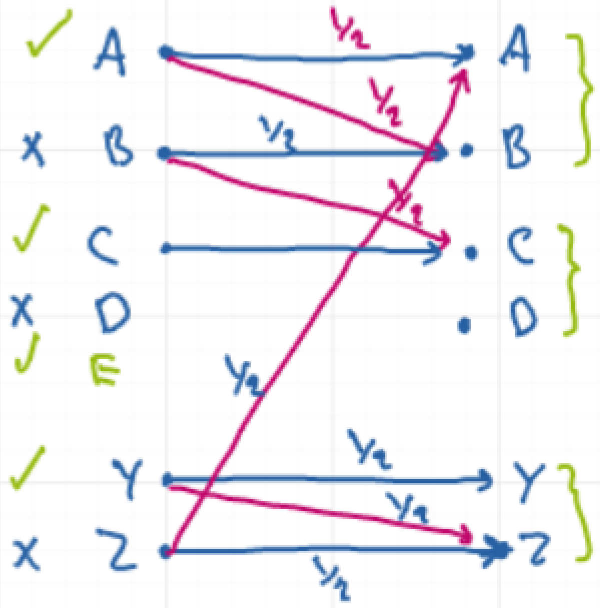


خروجی ها همپوشانی
ندارند.

$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X}\left[H(X) - \underbrace{\cancel{H(X|Y)}}_{=0}\right]$$

$$= \max_{P_X} H(X) = 1 \text{ bit/channel use}$$

توزیع یکنواخت P_X



مثال ۳: کانال ماشین تحریر :

به طور شهودی در هر بار استفاده از کانال
با روش یک در میان فوق
به اندازه $\log_2 13$
بیت می‌توانیم اطلاعات ارسال کنیم.

$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} \left[H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}_{=1} \right]$$

$$H(Y|X='A') = -\tfrac{1}{2}\log \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log \tfrac{1}{2} = 1$$

$$\vdots$$

$$H(Y|X='Z') = 1$$

$$\Rightarrow H(Y|X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} H(Y|X=x)\cdot P_X(x) = \sum_{x\in\mathcal{X}} P_X(x) = 1$$

$$C_{info} = \max_{P_X} \left[H(Y) - 1 \right]$$

$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} \left[H(Y) - \overbrace{H(Y|X)}^{=1} \right]$$

$$H(Y|X='A') = -\tfrac{1}{2}\log_2 \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log_2 \tfrac{1}{2} = 1$$

$$\vdots$$

$$H(Y|X='Z') = 1$$

$$\Rightarrow H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} H(Y|X=x) \cdot P_X(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) = 1$$

$$C_{info} = \max_{P_X} \left[H(Y) - 1 \right]$$

با انتخاب مناسب توزیع P_X می‌توانیم توزیع P_Y را یکنواخت کنیم.

$$= \log_2 26 - 1$$

$$= \log_2 13$$

$$\boxed{\text{قبلاً دیده بودیم:} \quad H(Y) \leq \log_2 |\mathcal{Y}| = \log_2 26}$$