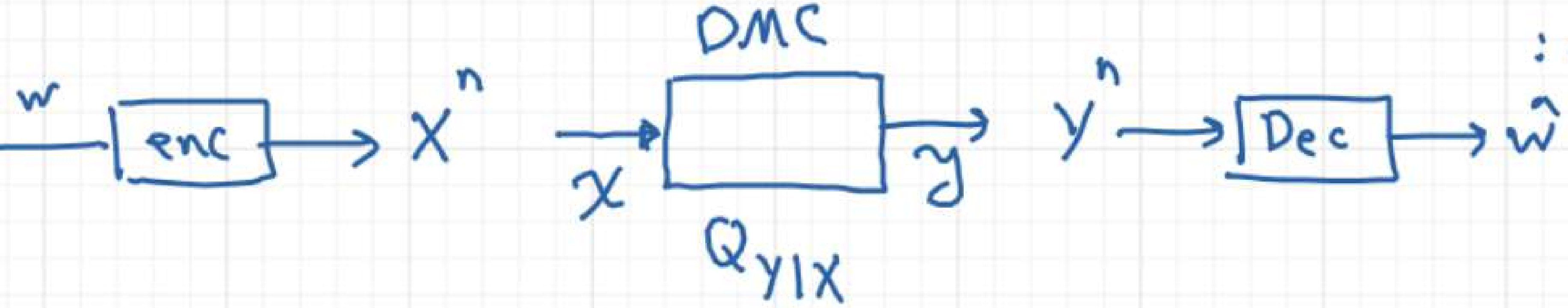
تئوری اطلاعات: جلسه ۱۶ : ۳ آذر ۹۹

* چند مثال از محاسبه ظرفیت کانال
* ارائه شهودی درباره ظرفیت کانال
* ارائه چند تعریف برای بیان قضیه ظرفیت کانال (قضیه دوم شنون)

---

* یادآوری:



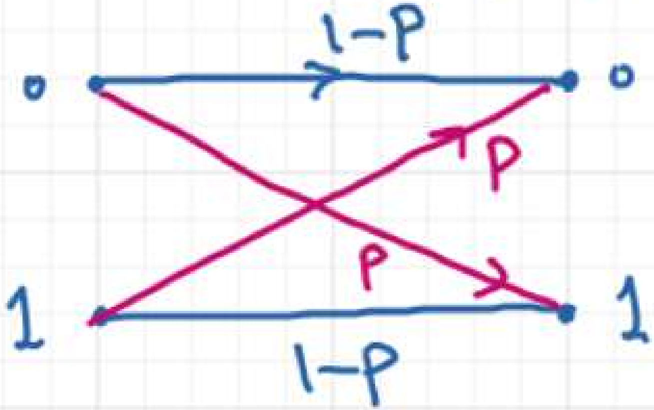
ظرفیت اطلاعاتی:

$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y)$$

---

* محاسبه ظرفیت برای Binary Symmetric channel : BSC(p)

$BSC(p)$: Binary Symmetric channel محاسبه ظرفیت برای *



$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

$$H(Y|X) = \underbrace{H(Y|X=0)}_{h_2(p)} \cdot \mathbb{P}[X=0] + \underbrace{H(Y|X=1)}_{h_2(p)} \cdot \mathbb{P}[X=1]$$

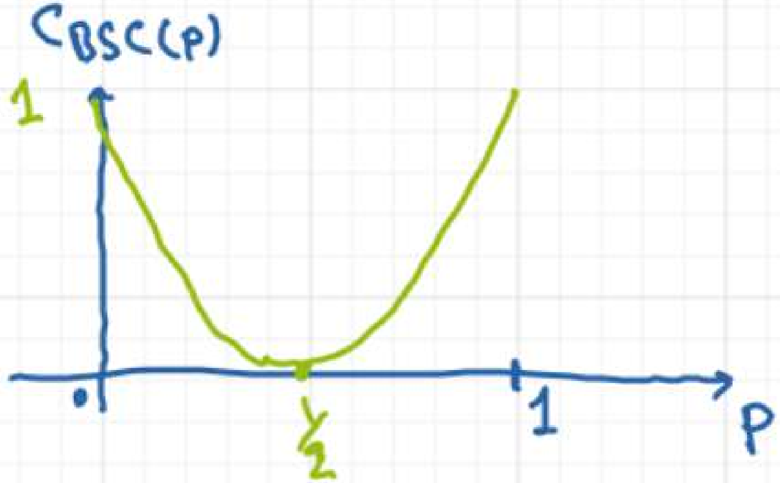
$$= h_2(p)$$

$$\Rightarrow C_{info} = \max_{P_X} \left[H(Y) - h_2(p) \right] = \max_{P_X} \left[H(Y) \right] - h_2(p)$$

به ازای P_X یکنواخت

$$= 1 - h_2(p)$$

bit/channel use

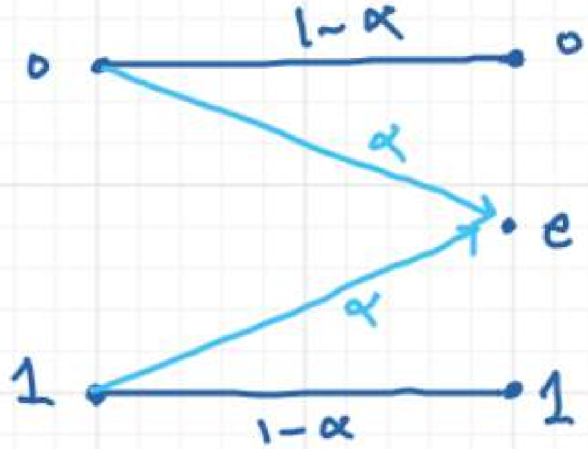


---

* ظرفیت Binary Erasure channel : $BEC(\alpha)$

$\mathbb{P}[X=0] = 1-\lambda$

$\mathbb{P}[X=1] = \lambda$



0 1 1 1 0 0 1 : n

0 1 e e 0 e 1 : $(1-\alpha)n$

به طور متوسط αn بیت پاک می‌گردد

$$C_{info} = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

با توجه به توزیع ورودی و عملکرد کانال:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}[Y=0] &= (1-\lambda)\cdot(1-\alpha) \\ \mathbb{P}[Y=e] &= \alpha \\ \mathbb{P}[Y=1] &= \lambda(1-\alpha) \end{aligned}\right\} + \longrightarrow = 1$$

$$H(Y) = -\sum_{i\in\{0,1,e\}} \mathbb{P}[Y=i] \log \mathbb{P}[Y=i]$$

$$= -(1-\lambda)(1-\alpha)\log(1-\lambda)(1-\alpha) - \lambda(1-\alpha)\log\lambda(1-\alpha) - \alpha\log\alpha$$

$$= \underline{-(1-\lambda)(1-\alpha)\log(1-\lambda)}\ \underline{-(1-\lambda)(1-\alpha)\log(1-\alpha)}$$
$$\underline{-\lambda(1-\alpha)\log\lambda}\ \underline{-\lambda(1-\alpha)\log(1-\alpha)} - \alpha\log\alpha$$

$$= (1-\alpha)h_2(\lambda)\ \underbrace{-(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha\log\alpha}_{=h_2(\alpha)}$$

$$= (1-\alpha)h_2(\lambda) + h_2(\alpha)$$

$$H(Y|X) = \underbrace{H(Y|X=0)}_{h_2(\alpha)} \cdot (1-\lambda) + \underbrace{H(Y|X=1)}_{h_2(\alpha)} \cdot \lambda = h_2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad C_{info} = \max_{\lambda \in [0,1]} \left[(1-\alpha) h_2(\lambda) + \cancel{h_2(\alpha)} - \cancel{h_2(\alpha)} \right]$$

برای توزیع یکنواخت ورودی $= (1-\alpha)$

---

* معرفی خواص ظرفیت کانال :

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) \quad \text{و} \quad I(X;Y) \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow C \geq 0$$

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) \leq \max_{P_X} H(X) = \log |X| \qquad (2)$$

به طور مشابه $\leq \log |Y|$

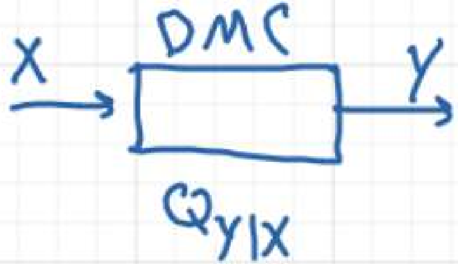
$$\Rightarrow C \leq \min \left[\log |X| , \log |Y| \right]$$

③ $I(X;Y)$ یک تابع مقعر از P_X (به ازای $P_{Y|X}$ ثابت)

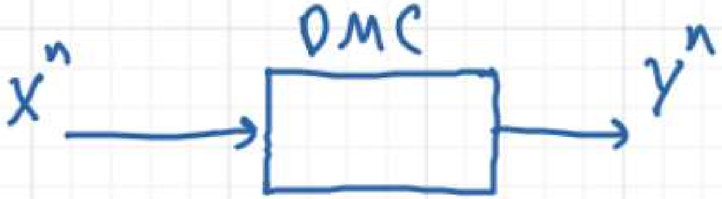
$\Leftarrow$ مسئله بهینه‌سازی محدب داریم که با روش‌های استاندارد بهینه‌سازی می‌توانیم جواب بهینه را بیابیم. (لزوما فرم بسته نیست).

---

* ایده کلی درباره اینکه چرا می‌توانیم با نرخ به اندازه ظرفیت ارسال کنیم:



n^{th} extension



(با فرض اینکه از خروجی فیدبک نداشته باشیم)

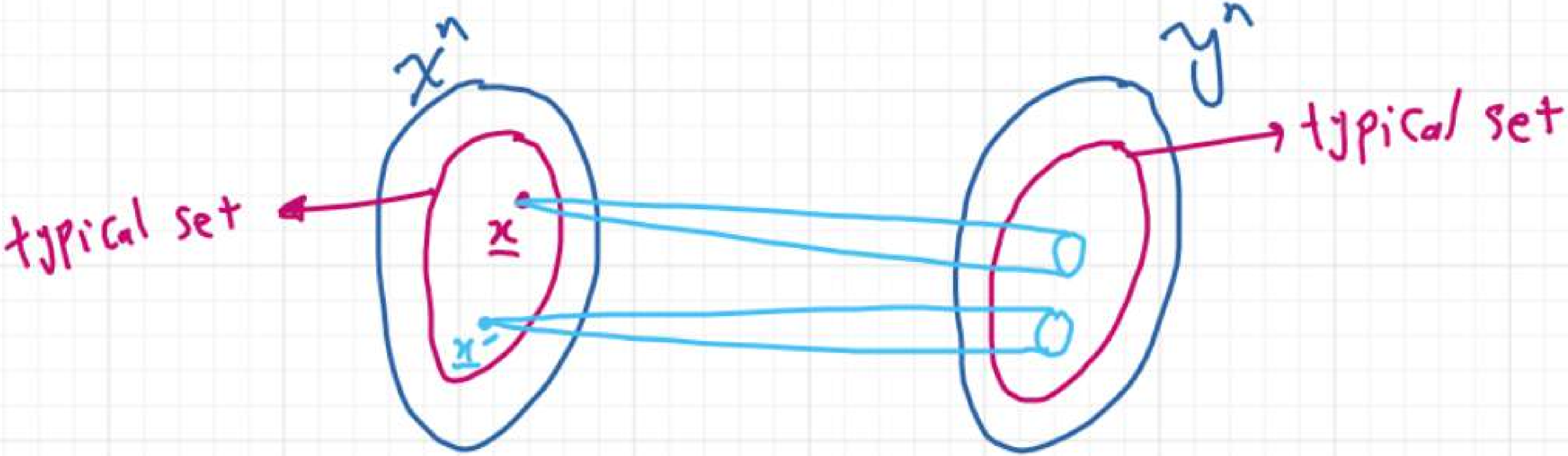
$$Q_{Y^n|X^n}(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y|X}(y_i|x_i)$$

• فرض کنید یک توزیع p_X iid برای تولید کردن رشته ورودی انتخاب کرده‌ایم.

$\Leftarrow$ با احتمال زیاد رشته‌های مشاهده شده نوعی هستند با تعداد: $2^{nH(X)}$

• رشته X^n iid و کانال DMC $\longrightarrow$ خروجی Y^n iid با یک توزیع p_Y

$\Leftarrow$ با احتمال زیاد رشته‌های مشاهده شده در خروجی کانال نوعی هستند با تعداد $2^{nH(Y)}$



• اگر یک رشته $\underline{x}$ را در ورودی ارسال کنیم خروجی‌ها نوعی هستند با $\underline{x}$:

تعداد اینها: $2^{nH(Y|X)}$

• مهم این است که رشته‌های دریافت شده خروجی باهم متفاوت باشند.
به ازای رشته‌های مختلف ورودی

⇐ حداکثر چند ورودی قابل تمایز می‌توانیم داشته باشیم:

$$|C| \leq \frac{2^{nH(Y)}}{2^{nH(Y|X)}} = 2^{nI(X;Y)}$$

نرخ این کد C چقدر است:

$$R_C = \frac{\log_2 |C|}{n} \leq I(X;Y)$$

این استدلال یک کران بالا برای نرخ ارسال روی یک کانال DMC می‌دهد.