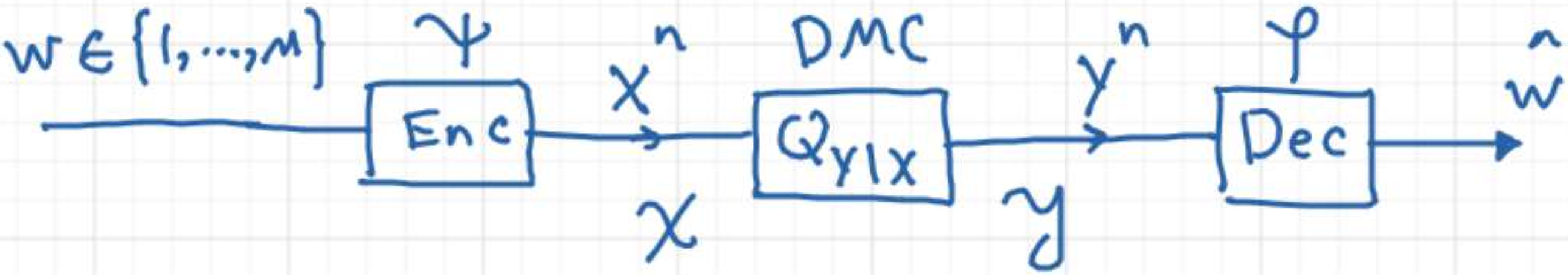
-6153-8540

تئوری اطلاعات و کدینگ، جلسه 18، 10 آذر 99

* قضیه ظرفیت ارسال اطلاعات بر روی کانال‌های نویزی

- بخش achievabilty



$$\mathbb{P}[\text{Error}] = \mathbb{P}[\hat{W} \neq W]$$

هدف: ارائه یک روشی که احتمال خطای کمی داشته باشد و نرخ ارسال کد ما هم تا حد ممکن زیاد باشد.

$$R = \frac{\log_2(M)}{n}$$

* به جای دیکود در جهت MAP از دیکود در jointly-typicality استفاده می‌کنیم (Sub optimum)

* رشته‌های مشترکا نوعی و Joint AEP

فرض کنید $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ و (x^n, y^n)

iid $(x_i, y_i) \sim P_{XY}$

$$P(x^n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i)$$

$$P(y^n) = \prod_{i=1}^{n} P_Y(y_i)$$

$$P(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^{n} P_{XY}(x_i, y_i)$$

* مجموعه رشته‌های مشترکاً نوعی (Set of Jointly Typical Seq.)

$$A_\varepsilon^{(n)}(X,Y) = \Big\{ (x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n :$$

$$\left| -\frac{1}{n}\log P(x^n) - H(X) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| -\frac{1}{n}\log P(y^n) - H(Y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| -\frac{1}{n}\log P(x^n, y^n) - H(X,Y) \right| < \varepsilon \Big\}$$

* قضیه (خواص رشته‌های مشترکاً نوعی): اگر (X^n, Y^n) به صورت iid از توزیع P_{XY} نمونه‌برداری شده باشند داریم:

① $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[(X^n, Y^n) \in A_\varepsilon^{(n)}(X,Y)\right] = 1$$

② $$(1-\varepsilon)\, 2^{n(H(X,Y)-\varepsilon)} \leq \left|A_\varepsilon^{(n)}(X,Y)\right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\varepsilon)}$$

برای n های به اندازه کافی بزرگ

همیشه درست

* تعمیم: فرض کنید $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)$ به صورت iid از توزیع $P_{\tilde{X}\tilde{Y}} = P_X \cdot P_Y$ تولید شده باشند

① $$\mathbb{P}\left[(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\varepsilon^{(n)}(X,Y)\right] \leq 2^{-n[I(X;Y)-3\varepsilon]}$$

* تمرین: فرض کنید $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)$ به صورت iid از توزیع $P_{\tilde{X}\tilde{Y}} = P_X \cdot P_Y$ توزیع داده شده باشند

① $$\mathbb{P}\left[(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}(X,Y)\right] \le 2^{-n[I(X;Y) - 3\epsilon]}$$

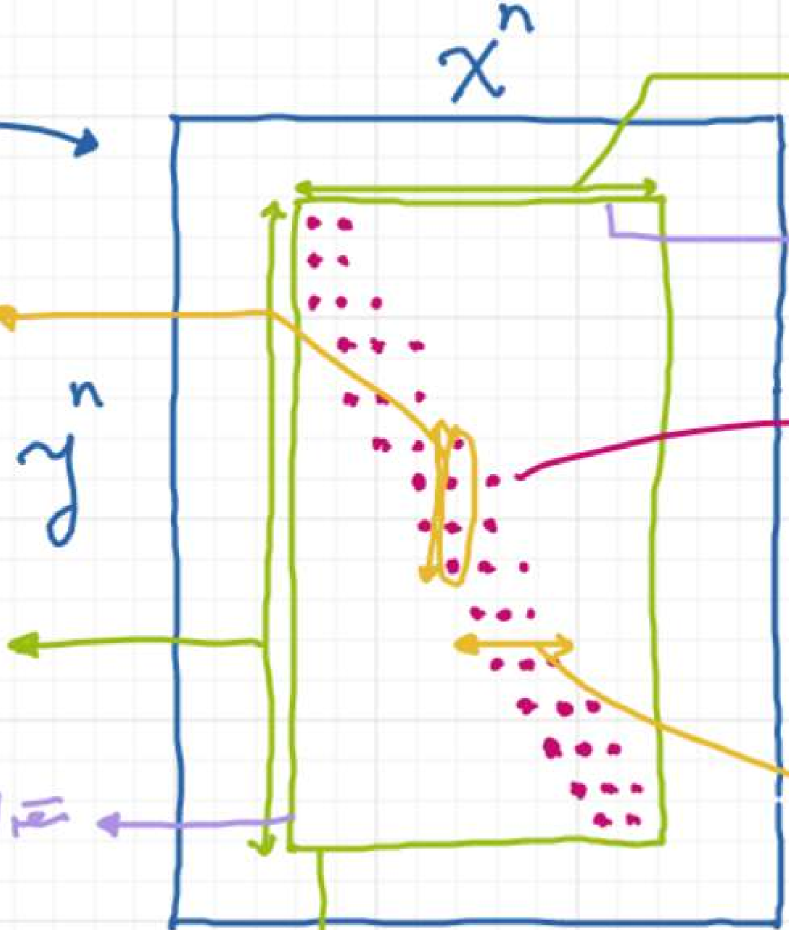
② برای n های به اندازه کافی بزرگ

$$(1-\epsilon)\, 2^{-n[I(X;Y) + 3\epsilon]} \le \mathbb{P}\left[(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}(X,Y)\right]$$

* نتایج بالا بر روی شکل

* نتایج بالا بر روی شکل

$X^n \times Y^n$



$A_\epsilon^{(n)}(X)$

تعداد $\approx 2^{nH(X)}$

$2^{nH(Y|X)} \simeq$ تعداد

رشته های مشترکاً نوعی

$\left(A_\epsilon^{(n)}(X,Y)\right)$

$2^{nH(X,Y)} \simeq$ تعداد

$A_\epsilon^{(n)}(Y)$

$2^{nH(Y)} \simeq$ تعداد

تعداد $\simeq 2^{nH(X|Y)}$

تعداد رشته های نوعی x^n که با یک رشته خاص y^n مشترکاً نوعی هستند.

$A_\epsilon^{(n)}(X) \times A_\epsilon^{(n)}(Y)$

تعداد $\approx 2^{nH(X)} \cdot 2^{nH(Y)} \simeq 2^{n[H(X)+H(Y)]}$

* تعبیر شهودی از صفحه دوم بالا :

فرض کنید دنباله‌های متوالی از توزیع $P_{\tilde{X},\tilde{Y}} = P_X P_Y$ را در نظر بگیریم :

$$A_\epsilon^{(n)}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \Big\{ (x^n, y^n) : \quad \left| -\frac{1}{n}\log p(x^n) - H(X) \right| < \epsilon$$

$$\left| -\frac{1}{n}\log p(y^n) - H(Y) \right| < \epsilon$$

$$\left| -\frac{1}{n}\log \underbrace{P_{X^n}(x^n)\cdot P_{Y^n}(y^n)}_{P_{\tilde{X}^n \tilde{Y}^n}} - H(X) - H(Y) \right| < \epsilon$$

$$\longrightarrow \simeq A_\epsilon^{(n)}(X) \times A_\epsilon^{(n)}(Y)$$

احتمال اینکه رشته ها مشترکا نوعی
شوند (مشابه توزیع $P_{X,Y}$
اگر که از توزیع $P_{\tilde{X},\tilde{Y}}$
نمونه گیری شده باشند

$$\simeq \frac{\text{تعداد نقاط قرمز}}{\text{تعداد نقاط داخل جعبه سبز}} \simeq \frac{2^{nH(X,Y)}}{2^{nH(X)} \cdot 2^{nH(Y)}} \simeq 2^{-nI(X;Y)}$$