تئوری اطلاعات و کدینگ : جلسه 19 ، 15 آذر 99

---

* مرور جلسه قبل و دنباله های مشترکا نوعی (Jointly typical seq.)
* اثبات بخش achievability قضیه ظرفیت کانال های نویزی شنون

---

* مرور ✓

* اثبات بخش achv قضیه شنون :

* روش ارسال و دریافت :

① نحوه ایجاد دفترچه کد (Codebook) :

یک دنباله از رشته های الفبای $\mathcal{X}$ به طول n ⟵ کد واژه

دفترچه کد یک مجموعه $M = 2^{nR}$ از کد واژه ها است :

① نحوه ایجاد دفترچه کد (codebook):

یک دنباله از رشته های الفبای $\mathcal{X}$ به طول n ← کد واژه

دفترچه کد یک مجموعه $M=2^{nR}$ از کد واژه ها است:

$$C=\begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & & \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \cdots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}_{2^{nR}\times n}$$

← پیام w ام

برای ایجاد کد C یک توزیع $P(x)$ فیکس می کنیم و بعد هر سطر کد C را به صورت iid از این توزیع انتخاب می کنیم.

به این ترتیب یک کد خاص C با احتمال زیر انتخاب می شود:

$$P_C(C)=\prod_{w=1}^{2^{nR}}\prod_{l=1}^{n} P(x_l(w))$$

بعد از اینکه کد C انتخاب شد، آن را به فرستنده و گیرنده نشان می دهیم.

② فرض می‌کنیم پیام W هم از توزیع یکنواخت زیر انتخاب می‌شود:

$$\mathbb{P}[W=w] = 2^{-nR}, \quad w \in \{1, \dots, 2^{nR}\}$$

③ برای ارسال پیام w کدواژه $x^n(w)$ را ارسال می‌کنیم.

④ در سمت خروجی کانال رشته y^n دریافت می‌کنیم طبق توزیع:

$$P(y^n \mid x^n(w)) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y|X}(y_i \mid x_i(w))$$

⑤ رشته دریافتی y^n را به پیام $\hat{w}$ دیکود می‌کنیم اگر که:

① $(x^n(w), y^n) \in A_\epsilon^{(n)}(X,Y)$

② هیچ پیام دیگر w' پیدا نشود که $(x^n(w'), y^n) \in A_\epsilon^{(n)}(X,Y)$

در غیر این صورت هم دیکودر اعلام خطا می‌کند (مثلا سمبل "0" را خروجی می‌دهد).

تحلیل احتمال خطای روش بالا:

یادآوری احتمال خطا:

$$\mathbb{P}_{Q,W}[\underbrace{\text{Error}}_{\{\hat{W} \neq W\}} \mid C] = \mathbb{P}_{Q,W}[\hat{W} \neq W \mid C]$$

تحلیل رابطه خطا برای یک دفترچه کد خاص لزوماً کار راحتی نیست و معمولاً خیلی سخت است.

ایده درخشان شنون این بود که به جای تحلیل خطا برای یک کد خاص، احتمال خطا بر روی دفترچه کدهای مختلف را هم در نظر گرفت و به نوعی احتمال خطا را میانگین‌گیری کرده است.

$$\mathbb{P}_{C,Q,W}[\text{Error}] \triangleq \sum_{C \in \mathcal{C}} P_C(C)\, \mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid C]$$

$\mathcal{C}$: مجموعه همه دفترچه کدهایی که در بالا ساختیم

به جای محاسبه $\mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid C]$ که سخت است

کمیت $\mathbb{P}_{C,Q,W}[\text{Error}]$ را محاسبه می‌کنیم که به علت تقارن خیلی راحت‌تر است.

اگر میتوانیم نشان دهیم که $\mathbb{P}_{\mathcal{C},Q,W}[\text{Error}]<\epsilon$ آنگاه حداقل یک $\mathcal{C}^*$ وجود
که

$$\mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid \mathcal{C}^*] < \epsilon \,.$$

در نتیجه ی ترسیم:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C},Q,W}[\underbrace{\text{Error}}_{\{\hat{W}\neq W\}}] = \sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{J}} P_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\, \underbrace{\mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid \mathcal{C}]}_{P_e^{(n)}(\mathcal{C})}$$

احتمال ~~متوسط~~ خطا برای کد $\mathcal{C}$

$$= \sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{J}} P_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \left(\frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^{2^{nR}} \lambda_i(\mathcal{C}) \right)$$

$$\lambda_i(\mathcal{C}) \triangleq \mathbb{P}_Q[\hat{W}\neq i \mid W=i, \mathcal{C}$$

$$= \frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^{2^{nR}} \underbrace{\sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{J}} P_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\, \lambda_i(\mathcal{C})}$$

مستقل از i است

$$= \sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{J}} P_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\, \lambda_i(\mathcal{C})$$

برای یک i دلخواه
$i\in[1:2^{nR}]$

$$= \frac{1}{2^{nR}} \sum_{i=1}^{2^{nR}} \underbrace{\sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{J}} P_c(\mathcal{C})\, \lambda_i(\mathcal{C})}$$

مستقل از i است

$$= \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{J}} P_c(\mathcal{C})\, \lambda_i(\mathcal{C})$$

برای یک i دلخواه
$i \in [1 : 2^{nR}]$

بدون از دست رفتن کلیت

$$= \mathbb{P}_{C,Q}\left[\text{Error} \mid W = 1\right]$$

برای محاسبه احتمال خطای وقایع زیر را تعریف می‌کنیم:

(ابتدا فرض می‌کنیم رشته $X^n(1)$ ارسال شده است و Y^n نتیجه گذشتن آن از کانال است).

$$E_i = \left\{ (X^n(i), Y^n) \in A_n^{(\epsilon)}(X,Y) \right\} \quad , \quad i \in \{1, \dots, 2^{nR}\}$$

$$\mathbb{P}_{C,Q}[\text{Error} \mid W=1] = \mathbb{P}\left[E_1^c \cup E_2 \cup \dots \cup E_{2^{nR}}\right]$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{P}[E_1^c]}_{\leq \varepsilon} + \sum_{i=2}^{2^{nR}} \underbrace{\mathbb{P}[E_i]}_{\leq 2^{-n[I(X;Y)-3\varepsilon]}}$$

برای n های بزرگ طبق joint AEP

$$\leq \varepsilon + (2^{nR}-1)\, 2^{-n[I(X;Y)-3\varepsilon]}$$

$$\leq \varepsilon + 2^{-n[I(X;Y)-R-3\varepsilon]}$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon$$

$\boxed{\text{با شرط اینکه } R < I(X;Y) - 3\varepsilon \text{ و n های به اندازه کافی}}$

$$\leq 2\varepsilon$$

تا الان نشان داده‌ایم که اگر $R < \underbrace{I(X;Y)}_{=C} - 3\varepsilon$ و n هم به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه داریم:

$C \rightarrow$ ظرفیت کانال

$$\mathbb{P}_{C,Q,W}[\text{Error}] \leq 4\varepsilon$$

$$p^*(x) = \underset{p(x)}{\arg\max}\; I(X;Y)$$

برای اتمام کار:

① فرض می‌کنیم که $p(x) = p^*(x)$

② نشان دادیم:

$$\mathbb{P}_{C,Q,W}[\text{Error}] = \sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{J}} P_C(\mathcal{C})\, \mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid \mathcal{C}] \leq 4\varepsilon$$

$\Leftarrow$ یک کد $\mathcal{C}^*$ خوب وجود دارد که

$$\mathbb{P}_{Q,W}[\text{Error} \mid \mathcal{C}^*] \leq 4\varepsilon$$

$\Rightarrow$ متوسط خطا کوچک است

③ باید نشان ماکسیمم خطا کوچک است ← مراجعه به کتاب Cover ص: 204