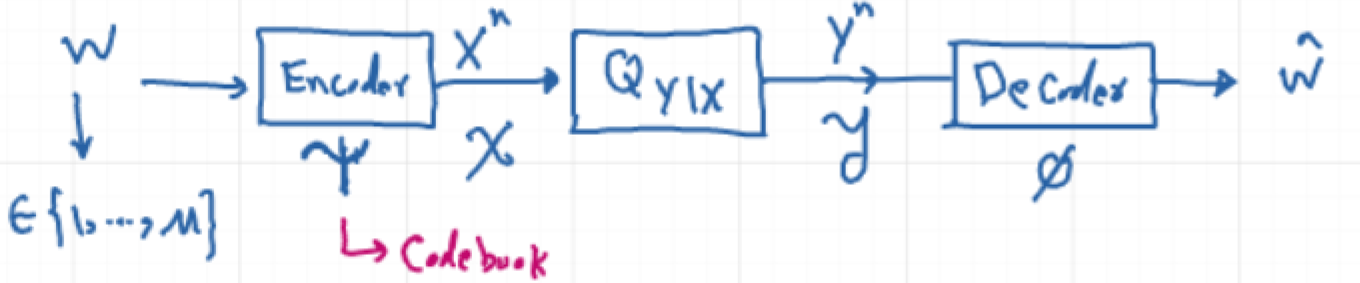
# تئوری اطلاعات و کدینگ : جلسه ۲۰ ، 17 آذر ۹۹

* مرور مختصر کدینگ کانال
* دیکود در بهینه ⟵ MAP decoder
* دیکود در ML
* فاصله همینگ
* مثال دیکود بهینه برای کانال BSC
* فاصله کمینه کد
* مثال هایی از کدها

* مرور مختصر بر روی کانال نویزی (کانال گسسته و بدون حافظه):




به هر کانال DMC می‌توانیم یک عدد C نسبت دهیم (ظرفیت کانال):

$$C = \max_{P_X} I(X;Y)$$

$$P_{XY} = P_X \cdot \underbrace{Q_{Y|X}}$$

که توسط کانال تعیین می‌شود و در مسئله بهینه‌سازی فوق ثابت است.

* در عمل باید Encoder و Decoder را طراحی کنیم. روش شانون ← یک Enc و Dec خوب (به معنی خطای کم و نرخ نزدیک به ظرفیت) وجود دارد.

یک کد خوب اگر بخواهد عملی هم باشد باید Enc و Dec کارا پیدا کنیم (از نظر محاسباتی).

* در عمل باید Encoder و Decoder را طراحی کنیم. روش کنونی ← یک Enc و Dec خوب (به معنی خطای کم و نرخ نزدیک به ظرفیت) وجود دارد.

یک کد خوب اگر بخواهد عملی هم باشد باید Enc و Dec کارا پیدا کنیم (از نظر محاسباتی).

* تاکنون دو معیار برای کارایی ارسال بر روی کانال نویزی تعریف کرده‌ایم:

① $$\mathbb{P}[\text{Error}] = \mathbb{P}_{\phi, W}[\hat{W} \neq W] \qquad \begin{cases} X^n = \psi(W) \\ \hat{W} = \phi(Y^n) \end{cases}$$

② $$R = \frac{\log_2 M}{n} \quad \text{bit/channel use}$$ نرخ ارسال اطلاعات

* به ازای یک نرخ خاص $R<C$ :

می‌خواهیم Enc و Dec طراحی کنیم که کمترین احتمال خطا را داشته باشد:

$$\min_{\psi, \phi} \mathbb{P}[\text{Error}] = \min_{\psi} \underbrace{\min_{\phi} \mathbb{P}[\text{Error}]}$$

* دیکودر بهینه:

* دیکودر بهینه :

• با فرض اینکه یک Enc (یا به اصطلاح یک کد C) داشته باشیم، می خواهیم ببینیم
برای کمینه کردن $\mathbb{P}[\text{Error}]$ ت.ج $\phi$ باید به چه شکلی باشد.

برای کمینه کردن احتمال خطا، احتمال درست بودن را بیشینه می کنیم:

$$P_c = \mathbb{P}[\hat{W} = W]$$

$$= \mathbb{P}[\phi(Y^n) = W]$$

$$= \sum_{x^n, y^n \in \mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n \,:\, x^n = \phi(y^n)} \underbrace{P_{X^n, Y^n}(x^n, y^n)}$$

$$= \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} P_{Y^n}(y^n) \underbrace{\sum_{\substack{x^n \in \mathcal{X}^n \\ x^n = \phi(y^n)}} P_{X^n | Y^n}(x^n | y^n)}$$

برای بیشینه کردن $P_c$ کافی است که:

به ازای هر رشته $y^n$ جمع داخلی (سبز) را بیشینه کنیم.

$\Leftarrow$

$$\phi_{opt}(y^n) = \underset{x^n \in \mathcal{X}^n}{\arg\max}\ P_{X^n|Y^n}(x^n|\underbrace{y^n}_{\text{observation}})$$

$\rightarrow$ Maximum a posteriori (MAP) $\rightarrow$ estimator, $\rightarrow$ decoder

با استفاده از قانون بیز :

$$\phi_{MAP}(y^n) = \underset{x^n}{\arg\max}\ P_{X^n|Y^n}(x^n|y^n)$$

$$= \underset{x^n}{\arg\max}\ \frac{P_{X^n,Y^n}(x^n,y^n)}{P_{Y^n}(y^n)}$$

$$= \underset{x^n}{\arg\max}\ P_{X^n,Y^n}(x^n,y^n)$$

$$= \underset{x^n}{\arg\max}\ P_{X^n}(x^n)\, Q_{Y^n|X^n}(y^n|x^n)$$

* یک دیکودر زیر بهینه: دیکودر ML:

$$\phi_{ML}(y^n) = \underset{x^n \in \mathcal{X}^n}{\operatorname{argmax}} \; P_{Y^n|X^n}(y^n|x^n)$$

$$\xrightarrow{DMC} = \underset{x^n}{\operatorname{argmax}} \; Q_{Y^n|X^n}(y^n|x^n)$$

اگر توزیع روی پیام های ورودی یکنواخت باشد، $\phi_{MAP}$ و $\phi_{ML}$ معادلند.

---

* فاصله همینگ (Hamming Distance):

اگر دو رشته با طول یکسان داشته باشیم: $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathcal{X}^n$

تعداد مکان هایی که با هم فرق دارند:

$d_H(\underline{x}_1, \underline{x}_2) =$ تعداد محل هایی که $\underline{x}_1$ و $\underline{x}_2$ تفاوت دارند

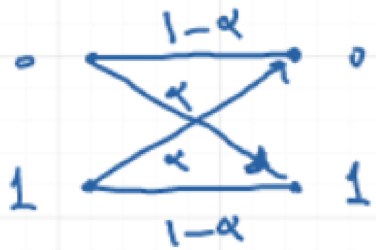
واقعاً یک "فاصله" به مفهوم ریاضی آن است.

① $d_H(\underline{a}, \underline{b}) \geq 0$

② $d_H(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \iff \underline{a} = \underline{b}$

③ $d_H(\underline{a}, \underline{c}) \leq d_H(\underline{a}, \underline{b}) + d_H(\underline{b}, \underline{c})$

④ $d_H(\underline{a}, \underline{b}) = d_H(\underline{b}, \underline{a})$




* دیکودر بهینه برای کانال $BSC(\alpha)$ $(\alpha < 1/2)$:

فرض: توزیع یکنواخت روی پیام های ورودی داریم

$\Leftarrow$ $\phi_{MAP} = \phi_{ML}$

$$\phi_{ML}(y^n) = \underset{x^n \in \mathcal{X}^n}{\arg\max}\ \underbrace{Q_{Y^n|X^n}(y^n|x^n)}$$

$$\overset{\text{DMC without feedback}}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{Q_{Y|X}(y_i|x_i)}$$

$$\xrightarrow{BSC(\alpha)} = \begin{cases} 1-\alpha & : y_i = x_i \\ \alpha & : y_i \neq x_i \end{cases}$$

$$Q_{Y^n|X^n}(y^n|x^n) = \alpha^{d_H(x^n, y^n)} (1-\alpha)^{n - d_H(x^n, y^n)}$$

$$= (1-\alpha)^n \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{d_H(x^n, y^n)}$$

$$\phi_{ML}(y^n) = \underset{x^n}{\arg\max} \left[ (1-\alpha)^n \cdot \Big(\underbrace{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\alpha < 1/2 \rightarrow\ < 1}\Big)^{d_H(x^n, y^n)} \right]$$

$$\phi_{ML}(y^n) = \arg\max_{x^n} \left[ (1-\alpha)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}_{\alpha<1/2 \;\to\; <1}^{d_H(x^n,\, y^n)} \right]$$

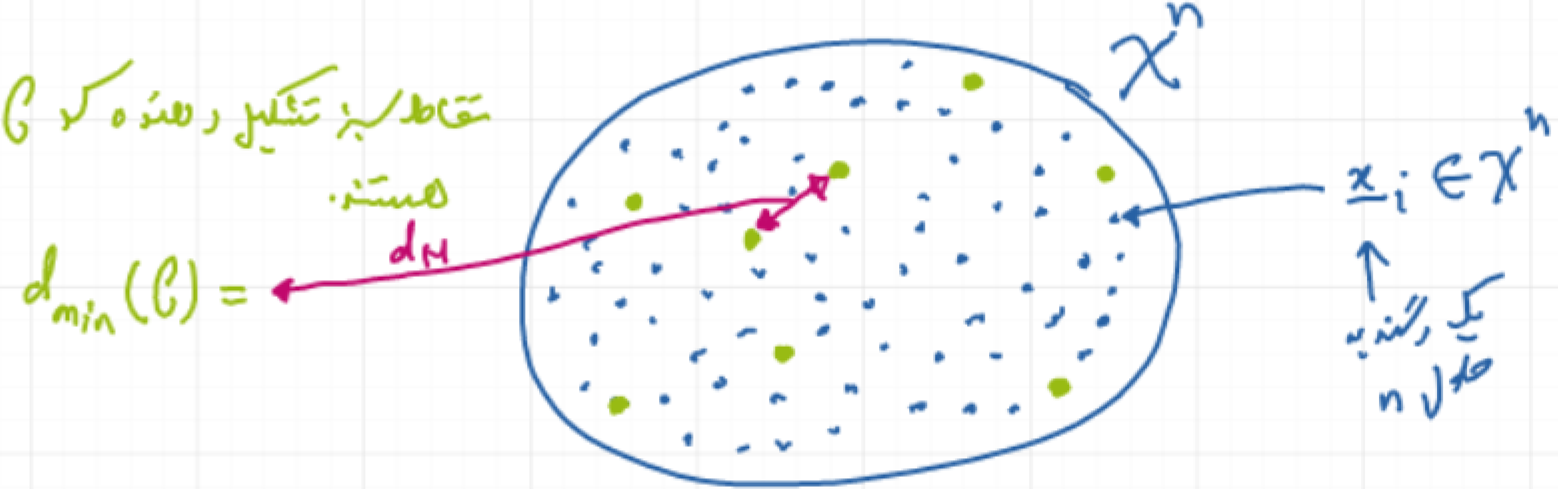
= با مشاهده $y^n$ دنبال $x^n \in \mathcal{C}$ ای بگردیم که کمترین فاصله همینگ با $y^n$ را دارد

(a minimum $\underbrace{\text{distance}}_{\text{Hamming}}$ decoder)

* ⇐ فاصله همینگ هندسه فضای کدها را مشخص می کند.

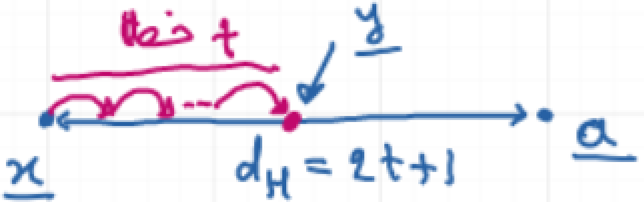
* تعریف: کمترین فاصله یک کد $C$ : $C = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_M\}, \ \underline{x}_i \in \mathcal{X}^n$

$$d_{min} \triangleq \min_{\substack{\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C \\ \underline{x}_1 \neq \underline{x}_2}} d_H(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$$



لم: اگر کمترین فاصله یک کد $C$ حداقل $2t+1$ باشد: $d_{min}(C) \geq 2t+1$

در نتیجه دیکودر نزدیکترین همسایه می‌تواند $t$ خطا یا کمتر را درست دیکود کند.




$$d_H(\underline{x}, \underline{y}) = t$$
$$d_H(\underline{y}, \underline{a}) = t+1$$

$\Rightarrow$ $\underline{y}$ به $\underline{x}$ دیکود می‌شود نه به $\underline{a}$ و نه به هیچ رشته دیگری.