تئوری اطلاعات و کدینگ: جلسه 23، 1 دی 1399

* Tanner graph

* کدهای LDPC و Iterative decoding

* متغیرهای تصادفی و تعریف آنتروپی تفاضلی (differential entropy)

• اطلاعات متقابل

• آنتروپی نسبی

* رابطه آنتروپی تفاضلی و آنتروپی گسسته

* نسخه پیوسته AEP

* کدهای خطی ← نحوه نمایش ← ماتریس مولد G

← ماتریس چک H

سطرهای G : پایه‌های فضای کد C

سطرهای H : پایه‌های فضای متعامد $C^{\perp}$

سطرهای H بیانگر قیود خطی بر روی کدواژه‌ها

* مثال: کد همینگ $(7,4,3)_2$:

$\hookrightarrow \mathbb{F}_2$

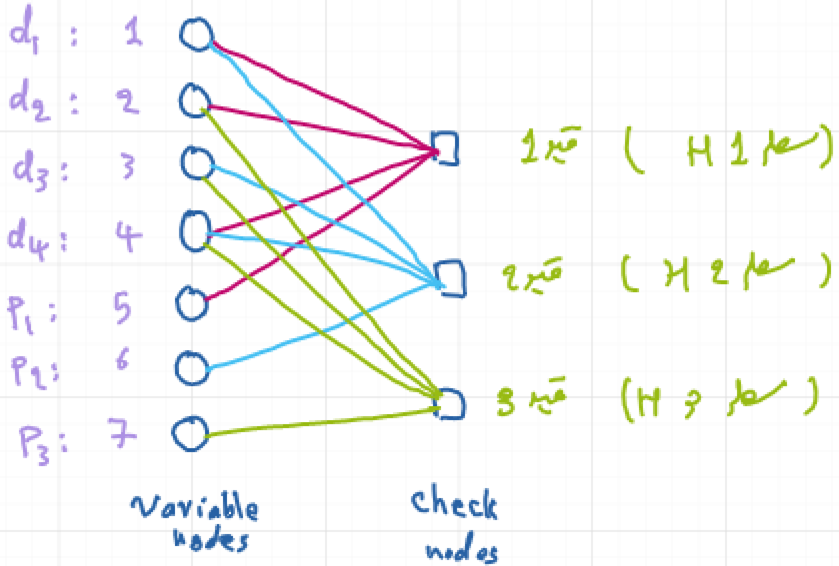
$$d_1 d_2 d_3 d_4 \longrightarrow d_1 d_2 d_3 d_4 \; P_1 P_2 P_3$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_4 + P_1 = 0 \\ d_1 + d_3 + d_4 + P_2 = 0 \\ d_2 + d_3 + d_4 + P_3 = 0 \end{cases}$$

$$H = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow H\underline{x} = 0 \iff \forall x \in C$$

Tanner graph* یک کد خطی C :

یک گراف دوبخشی



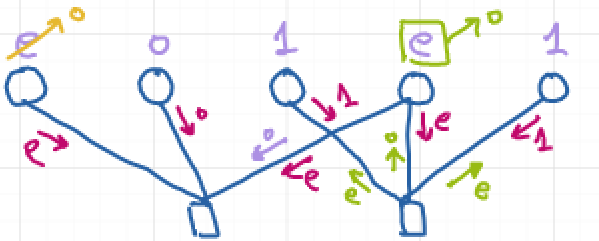
* LDPC (Low Density Parity Check):

ماتریس H تنک (sparse) است.

• به‌جای دیکودر بهینه MAP از یک دیکودر message passing استفاده می‌کنیم

Complexity : $O(n)$ $\Leftarrow$ (belief propagation)

* مثال دیکودینگ بر روی Tanner graph برای کانال BEC :



مرحله 1: با رنگ قرمز

مرحله 2:

مرحله 3:

مرحله 4:

$1 + e + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{e = 0}$

* تعریف آنتروپی توسعه به متغیرهای پیوسته :

• متغیر X با CDF F_X : $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$

اگر $F_X(x)$ پیوسته باشد ← متغیر X یک متغیر تصادفی پیوسته است.

اگر $F_X(x)$ مشتق پذیر باشد ← تابع چگالی احتمال (pdf) :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

① $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

② $$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f_X(x)\,dx$$

* تعریف: support set یک متغیر تصادفی X :

$$S = \{x : f_X(x) > 0\}$$

* آنتروپی تفاضلی (Differential Entropy):

در صورت وجود: $$h(X) = -\int_S f_X(x) \log f_X(x)\, dx$$

* مثال: $X \sim \text{Uniform}[0, a]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & x \in [0, a] \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log\left(\frac{1}{a}\right) dx = \log a$$

$$0 \leq a < 1 \Rightarrow h(X) < 0 \quad !$$

*مثال: $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x)\, dx$$

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$= -\frac{1}{\ln 2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= -(\log e) \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$= (\log e) \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \ln e \right]$$

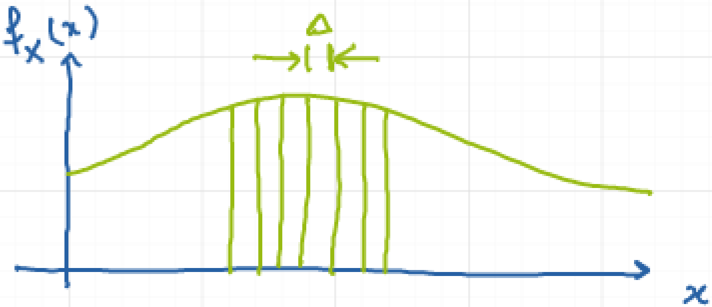
$$= (\log e) \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2) \right]$$

$$: \log_b^a \cdot \log_c^b = \log_c^a$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma^2) \quad \text{bit}$$

* رابطه آنتروپی تفاضلی و آنتروپی گسسته :

یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f_X



یادآوری قضیه مقدار میانگین : اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

یک مقدار $c \in [a,b]$ که :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

بر اساس قضیه بالا :

$\exists\, x_i \in [i\Delta, (i+1)\Delta]$:

$$f_X(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)\,dx$$

بر اساس قضیه بالا :

$$f_X(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)\,dx \quad : \quad \exists\, x_i \in [i\Delta, (i+1)\Delta]$$

* از روی X یک نسخه گسسته X^Δ به صورت زیر میسازیم:

$$X^\Delta = x_i \,, \qquad \text{if} \quad i\Delta \leqslant X < (i+1)\Delta$$

$\Leftarrow$ می‌توانیم برای X^Δ آنتروپی گسسته حساب کنیم:

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbb{P}[X^\Delta = x_i] \\ &= \mathbb{P}[i\Delta \leqslant X < (i+1)\Delta] \\ &= \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f_X(x)\,dx \\ &= f_X(x_i)\cdot\Delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad H(X^\Delta) = -\sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_i \log p_i$$

$$\Rightarrow \quad H(X^{\Delta}) = -\sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_i \lg p_i$$

$$= -\sum_{i} \left(f_X(x_i)\cdot\Delta\right) \lg\left(f_X(x_i)\,\Delta\right)$$

$$= -\sum_{i} f_X(x_i)\,\Delta \lg f_X(x_i) - \lg\Delta \underbrace{\sum_{i} f_X(x_i)\,\Delta}_{=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \,=\, 1}$$

$\int f_X(x) \lg f_X(x)\,dx$ [illegible]

[illegible]

$$\simeq h(X) - \lg\Delta$$

$$\Rightarrow \quad H(X^{\Delta}) + \lg\Delta \xrightarrow{\Delta\to 0} h(X)$$