

فرايندهای ساده‌سازی : جلسه 1 ، 25 بهمن 1399

* سبک‌تر

* به‌فهم‌تر

* دربرگیرنده نظریه‌های اساسی

• اصول موضوعه احتمالات

• نتایج و آزمون‌های مستقل

• تغییر ساده‌سازی

• امید ریاضی

• گشتاوره (moments) یک تغییر ساده‌سازی

• در عمل هیچ‌چیز کامل نیست.

Seek simplicity or distrust it!

* به‌فهم‌تر :

• بررسی بر افکار (اصول موضوعه افکار) برقی اثرات پدید می آید ،
توانش ابعاد بزرگ ، دگرایی پدید می آید) ← 3-4

• معرفی خرابی های سقاری و مقایسه پایه (خرابی های ایستا ، تحلیل کسیتی ، ergodicity)
طیف توان خرابی های سقاری) ← 6-7 جلد

• خرابی پرواکن ← 2 جلد

• خرابی های گادسی ← 1-2 جلد

• ترتیب های مارکف ← 3-4 جلد

• تئوری تشیی ← 2 جلد

• نظریه های نقطه ای ← 5-6 جلد

• ...

* مروجی به احتمالات :

• اصول موضوعه تئوری احتمالات :

یک مدل احتمالاتی که منفرد دارد :

← فضای نمونه
(Ω , $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) (sample space)

یک تابع احتمال $\mathbb{P}$ ← مجموعه وقایع (σ -field)

① فضای نمونه: Ω مجموعه همه تم‌روبی‌های یک آزمایشی

② یک مجموعه از وقایع $\mathcal{F}$ که هر واقعه یک زیرمجموعه فضای نمونه

$$\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega$$

③ یک تابع احتمال $\mathbb{P}$ که به هر واقعه (یک عضو از $\mathcal{F}$) یک عددی بین [0,1]

نسبت می‌دهد.

- مجموعه $\mathcal{F}$ قوام، زیرساز دارد : ← آنگاه مجموعه وقایع به‌دردنبود

- مجموعه F خواص زیر را دارد : $\leftarrow$ انتگرار مجموعه و نتایج به در دسترس

① $\Omega \in F$: Ω یک اضافه است :

② اگر $A_1, A_2, \dots \in F$ یک دنباله و نتایج باشند ، آنگاه :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

③ اگر $A \in F \iff A^c \in F$

نتایج مهم به بالا :

① $\Omega \in F \Rightarrow \Omega^c \in F \Rightarrow \emptyset \in F$

② $A_1, A_2, \dots \in F \Rightarrow A_1^c, A_2^c, \dots \in F$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in F \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in F$$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} &\Rightarrow A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F} \quad (2) \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F} &\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1] \quad \text{تابع احتمال}$$

که در اصول زیر صدق میکند

$$(1) \quad P[\Omega] = 1 \quad \text{چون } \Omega \text{ واقعه صدق است.}$$

$$(2) \quad P[A] \geq 0 \quad : \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(3) \quad \overline{A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}} \quad \text{وقایع هستند که اشتراکی ندارند (disjoint)}$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

- - - - -

③ اگر $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ و متاهی هستند که اشتراکی ندارند (disjoint)
 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

بستگی نتایج زیر را داریم:

① $P[A^c] = 1 - P[A]$

② $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P[B] \geq P[A]$

③ کران اتحاد (Union bound):

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

* وفاق هستند: دو واقعه $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ مستقل هستند اگر که

* وفاق مستقل: دو واقعه $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ مستقل هستند اگر که

$$P[A_1 \cap A_2] = P[A_1] \cdot P[A_2]$$

$A_1, \dots, A_n$: n متغیر مستقل :

$$P\left[\bigcap_{i \in S} A_i\right] = \prod_{i \in S} P[A_i]$$

$\forall S \subseteq [1:n]$

* مدل توانان (Combined model) : فرض کنید دو مدل احتمالاتی معنای نمونه

Ω_1, Ω_2 . مدل توانان آنها معنای نمونه $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_c$

تکلی $\hookrightarrow$ سکه $\hookrightarrow$

$$\hookrightarrow \{ (6, 1), \dots, (1, 6), \dots, (6, 6), \dots, (1, 1) \}$$

می گوئیم دو مدل 1 و 2 (یا دو آنتروپی معنای 1 و 2) مستقل هستند اگر که

$$P_c[A \times B] = P_1[A] \cdot P_2[B]$$

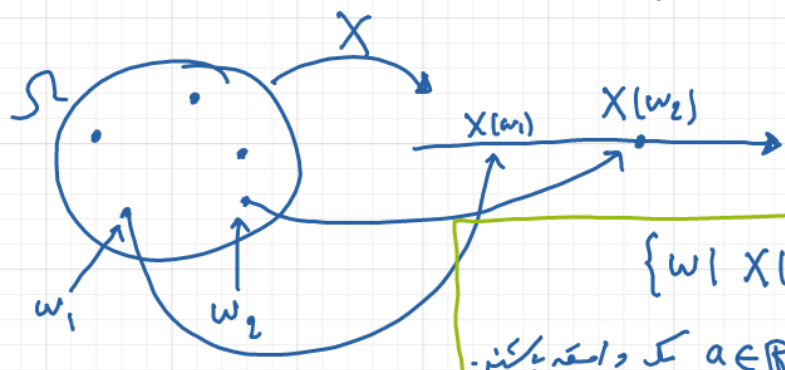
می‌گوییم دو مدل 1 و 2 (یا دو آماره‌ی مقادیری 1 و 2) مستقل هستند اگر که

$$P_C[A \times B] = P_1[A] \cdot P_2[B]$$

$\downarrow \qquad \downarrow$
 $\in \Omega_1 \quad \in \Omega_2$

$$X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

* مقیاس‌های مقادیری: "یک تابع است"



که مجموعه $\{\omega \mid X(\omega) \leq a\}$
به ازای هر مقدار $a \in \mathbb{R}$ یک دامنه باشد.

این شرط می‌لایه با آماره‌ی دسه تابع توزیع تجمعی (Cumulative dist. Func.)
CDF

$$F_X(a) = P[X \leq a] = P[\{\omega \mid X(\omega) \leq a\}]$$

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

خواص تابع توزیع تجمعی :

① تابع غیر نزولی که از 0 تا 1 به قدر مقدار می گیرد.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \tag{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \tag{3}$$

④ تابع $F_X(x)$ از سمت راست پیوسته است :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$