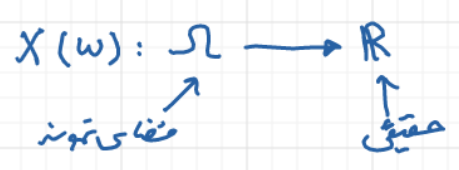


فرايندهای تعاريفي: جلسه 2 6 27 بهمن 1399

* مطالب جلسه:

- اداره بحث متغيرهای تعاريفي
- اسيدهای رياضي
- گشتاورهای يك متغير تعاريفي
- اسيدهای رياضي شرطی
- تاج مولد گشتاور
- برقي از نامساوی های پایه در نظريه احتمال

* متغيرهای تعاريفي



با اين شرط كه $\{\omega \mid X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}$

با این شرط که $\{\omega \mid X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}$
یک واقعه باشد

↔ این شرط اجازه تعریف CDF می دهد :

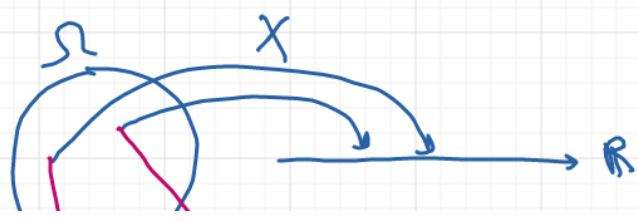
$$F_X(\alpha) = P[X \leq \alpha] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

مثال: پرتاب تاس : $\Omega = \{f_1, \dots, f_6\}$

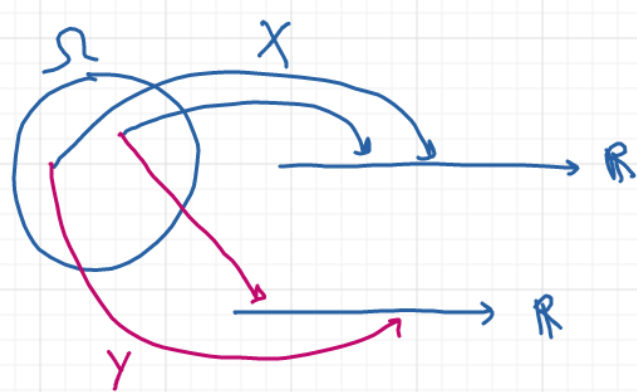
$$\forall \omega \in \Omega : X(f_i) = i, \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\}$$



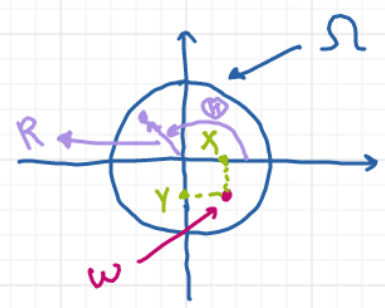
* می توانیم بررسی یک آزمایش تعدادی چند متغیره تعدادی به صورت همزمان
تعریف کنیم.



* می‌توانیم بررسی یک آزمایشی مقادیر چند متغیره مقادیری به صورت همزمان
تعریف کنیم.



مثال: در دایره واحد یک نقطه را به طور کامل مقادیری انتخاب می‌کنیم.



$$\begin{cases} X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ R: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

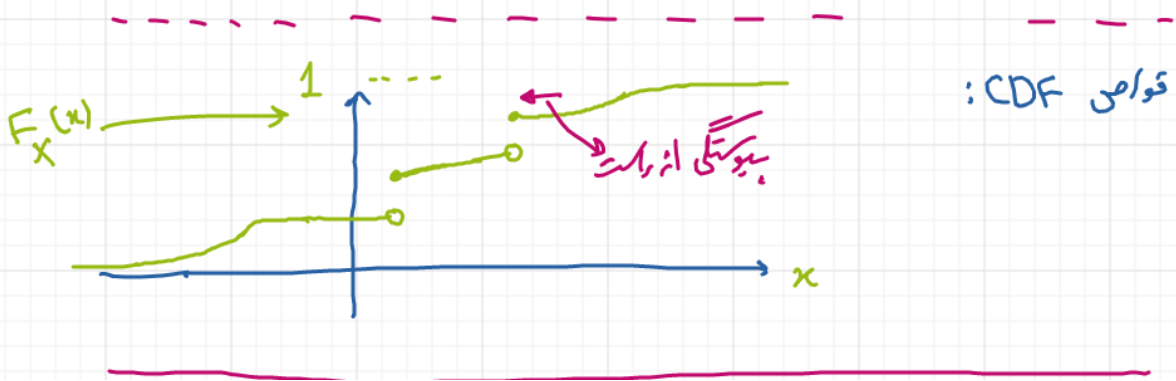
* اگر بخواهیم درباره چند متغیر تصادفی به ملر هزمان صحبت کنیم ، آنگاه باید نحوه زیر را داشته باشیم

$$\{\omega \mid X_1 \leq \alpha_1, \dots, X_n \leq \alpha_n\} \in \mathcal{F}$$

کای $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ یک واقعه باشد

↔ همان توزیع مشترک تعریف کنیم :

$$F_{X_1, \dots, X_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{P}[X_1 \leq \alpha_1, \dots, X_n \leq \alpha_n]$$



* متغیرهای تصادفی گسسته :

متغیر تصادفی فضای نمونه را به مقادیر گسسته و شمارا تصویر کند.

← CDF آن یک شکل پله‌ای دارد $P[X=x_{i+1}] \rightarrow$
برش‌ها در همان مقادیر گسسته
استقارای هستند

می‌توانیم با تابع چگالی (prob. mass func):
برای x_i های ممکن $P(x_i) = P[X=x_i]$

* متغیر تصادفی پیوسته :

متغیر تصادفی ای که CDF آن یک تابع پیوسته باشد.

به طور مثال درایی حالتی همان نشان داد که یک تابع $f_X(x)$ وجود دارد
(برای هر $x \in \mathbb{R}$) که :

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} : P[X \in A] = \int_A f_X(x) dx$$

تابع توزیع تجمعی:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

در نتیجه: تابع چگالی احتمال f_X (prob. density func.):

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

تعریف

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_X(x+\epsilon) - F_X(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X \leq x+\epsilon]}{\epsilon}$$

* امید ریاضی یک متغیر تصادفی:

! E نمایشی از امید.

• برای متغیرهای گسسته:

PMF

$$E[X] = \sum_i x_i \underbrace{P_X(x_i)}$$

1

* امید ریاضی یک متغیر تصادفی :

! E نمایی و امید .

• برای متغیرهای گسسته :

PMF

$$E[X] = \sum_i x_i \underbrace{\widetilde{P}_X(x_i)}_{= P[X=x_i]}$$

← تعبیر: مرکز جرم توزیع متغیر تصادفی

• برای متغیرهای پیوسته :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

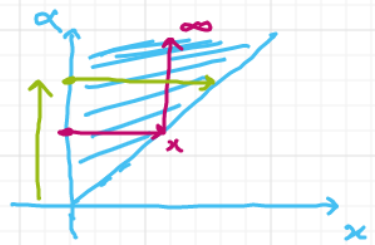
• برای حالت کلی چگونه $E[X]$ را حساب می کنیم ؟

• فرض کنید X یک R.V. پیوسته و $x > 0$ در این صورت :

فرض کنید X یک R.V. بیگانه و $x > 0$ در این صورت:

$$\int_0^\infty F_X^c(x) dx = \int_0^\infty \underbrace{[1 - F_X(x)]}_{P[X > x]} dx = \int_0^\infty P[X > x] dx = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_X(\alpha) d\alpha \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\alpha f_X(\alpha) dx d\alpha$$



$$= \int_0^\infty f_X(\alpha) \underbrace{\left(\int_0^\alpha dx \right)}_{=\alpha} d\alpha = \int_0^\infty \alpha f_X(\alpha) d\alpha = E[X]$$

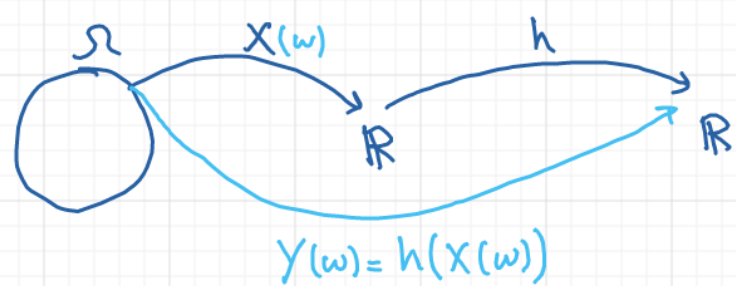
در حالت کلی برای متغیر تصادفی دلخواه X با CDF $F_X(x)$ داریم:

$$E[X] = - \int_0^\infty F_X(x) dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

• در حالت کلی برای متغیر تصادفی دلخواه X با CDF $F_X(x)$ داریم :

$$\mathbb{E}[X] = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$$

* متغیرهای تصادفی که توابع از متغیرهای تصادفی دیگر هستند



از روی خواص X و خواص h ← خواص Y را بدست میاوریم

ولی به طور خاص برای محاسبه $\mathbb{E}[Y]$ لازم نیست ابتدا توزیع Y را پیدا کنیم

ولی به طور خاص برای محاسبه $E[Y]$ لازم نیست ایتدا استخراج Y را پیدا کنیم

گفته: $E[Y] = \sum_y y P_Y(y) = \sum_x h(x) P_X(x)$

پس گفته: $E[Y] = \int y f_Y(y) dy = \int h(x) f_X(x) dx$

و گفته: $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_X(x)$: Stieltjes integral

* گشتاورهای یک متغیر تصادفی

$E[X^n]$: گشتاور n -ام X
 n^{th} moment of X

$E[X^n]$ $\rightarrow$ $\int x^n f_X(x) dx$

* گشتاورهای یک متغیر تصادفی

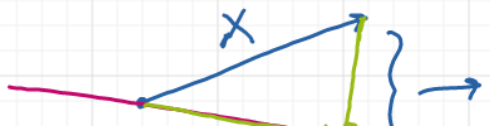
$E[X^n]$: گشتاور n -ام X
 n^{th} moment of X

* گشتاورهای مرکزی یک متغیر تصادفی

$E[(X - \mu_X)^n]$
 $\downarrow$
 $\mu_X = E[X]$

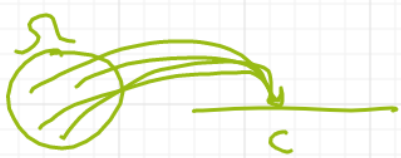
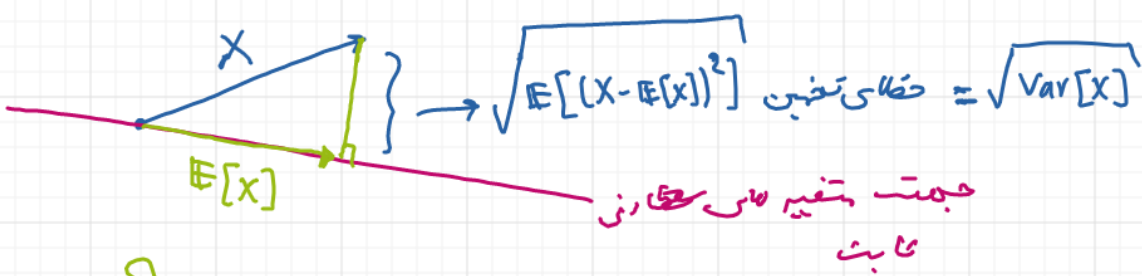
گشتاور مرکزی دوم $\leftarrow$ واریانس : $Var[X]$

• تعبیر آماری: جهت بین تخریب یک متغیر تصادفی با یک عدد ثابت
(فضای برداری متغیرهای تصادفی)



فضای تغییرات

(فضای برداری متغیرهای تصادفی)



• برای نامحدود بین (و متغیر تصادفی)
• توان از رابطه زیر استفاده است :

$$\sqrt{\mathbb{E}[(X - \gamma)^2]}$$

