

فرایندهای تصادفی: جلسه 3 6 2 اسفند 1399

* مطالب این جلسه:

- امید ریاضی شرطی
- تابع مولر گشتاور
- برخی از نامساوی‌های پایه در نظریه احتمال (Chernoff & Chebyshev & Markov)
- قانون (ضعیف) اعداد بزرگ Law of large number
- قضیه حد مرکزی (Central limit theorem)

* امید ریاضی شرطی:

$$\mathbb{E}[X | A] = - \int_{-\infty}^0 F_{X|A}(x) dx + \int_0^{\infty} F_{X|A}^c(x) dx$$

↑
واقعه

$$F_{X|A}(x) = \frac{\mathbb{P}[X \leq x, A]}{\mathbb{P}[A]}$$

* امید ریاضی شرطی :

$$\mathbb{E}[X|A] = - \int_{-\infty}^0 F_{X|A}(x) dx + \int_0^{\infty} F_{X|A}^c(x) dx$$

↑
واقعہ

$$F_{X|A}(x) = \frac{P[X \leq x, A]}{P[A]}$$

• X و Y هم دو گسسته است:

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_x x \underbrace{P_{X|Y}(x|y)}_{\text{PMF}}$$

• X یک متغیر تصادفی گسسته: مانند حالت بالا $A = \{Y=y\}$

و بعد تعریف مطالبی بالا بر حسب CDF شرطی

• X و Y هم دو پیوسته باشند:

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

• X دلا هر دو پيوسته باشند :

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}} dx$$

$$g(y) \triangleq \mathbb{E}[X | Y=y]$$

posit.

تغییر امید ریاضی $\Rightarrow$ اطلاعات جانبی
Side information

$$E[X|Y=y] \approx E[X] = 1$$

$g(y) \rightarrow \mathbb{E}[X|y]$

• مقصد اس کے ریاضی کل (Total expectation):

• قضیه امید ریاضی کل (Total expectation) :

$$\underset{P_X}{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E} \left[\underset{P_Y}{\mathbb{E} \left[\underset{P_{X|Y}}{\mathbb{E}[X|Y]} \right]} \right]$$

• حالت خاص هر X و هم Y است :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_y P_Y(y) \mathbb{E}[X|Y=y] \\ &= \sum_y P_Y(y) \sum_x x P_{X|Y}(x|y) \end{aligned}$$

• برای حالت فاصلی هر دو بهینست:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \mathbb{E}[X|Y=y] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx dy \end{aligned}$$

• برای حالت خاص هر دو به یک می رسد:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \underline{E[X|Y=y]} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx dy \end{aligned}$$

• قضیه: قانون واریانس کل

$$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

* تابع مولد گشتاور (Moment generating func.):

• برای متغیر تصادفی X

$$\begin{aligned} \phi_X(r) &= E[e^{rX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} dF_X(x) \Rightarrow \phi_X(0) = 1 \\ &= \int_0^{\infty} e^{rx} dF_X(x) + \int_{-\infty}^0 e^{rx} dF_X(x) \end{aligned}$$

* تابع مولد گشتاور (Moment generating func.):

• برای مقیم x بی X $\Rightarrow \phi_X(0) = 1$

$$\phi_X(r) = \mathbb{E}[e^{rX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} dF_X(x)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{rx} dF_X(x)}_{\text{مقدار } r_{-}(x)} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{rx} dF_X(x)}_{\text{مقدار } r_{+}(x)}$$

$r_{+}(x)$: مقدار $\sup$ r هایی
این انتگرال همگرا است
 $r_{-}(x)$: مقدار $\inf$ r هایی
که این انتگرال همگرا است.

$\Leftarrow$ می توانیم تابع مولد گشتاور را برای $r_{-}(x) < r < r_{+}(x)$ تعریف کنیم.

• مقید: اگر $\phi_X(r)$ بر روی یک بازه حول صفر تعریف شده باشد (یعنی $r_{-} < 0 < r_{+}$)

آنگاه مشتقات هر مرتبه $\phi_X(r)$ وجود دارد:

• مقیم: اگر $\phi_X(r)$ به روی یک بازه حول صفر تعریف شده باشد (یعنی $r_- < 0 < r_+$)

آنگاه مشتقات هر مرتبه $\phi_X(r)$ وجود دارد:

$$\frac{d^k \phi_X(r)}{dr^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{rx} dF_X(x) \Bigg|_{r=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_X(x) = \mathbb{E}[X^k] : k^{th} \text{ moment of } X$$

* کاربرد ۱: تابع مولگشتاور جمع چند متغیر تصادفی مستقل:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$\phi_{S_n}(r) = \mathbb{E}[e^{rS_n}] = \mathbb{E}[e^{r(X_1 + \dots + X_n)}]$$

$$\begin{aligned}\phi_{S_n}(r) &= \mathbb{E}\left[e^{r S_n} \right] = \mathbb{E}\left[e^{r(X_1 + \dots + X_n)} \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{r X_i} \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{r X_i} \right] = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(r)\end{aligned}$$

$\nearrow$ X_i ها مستقل هستند

• حالت خاص: اگر X_i ها iid باشند و $X_i \sim X$

$$\Rightarrow \phi_{S_n}(r) = [\phi_X(r)]^n \Rightarrow \text{نامیه همدگرایی تابع مولد گشت در } X \text{ و } S_n \text{ برابری است.}$$

* بررسی نامساوی های اوجکاتی

• نامساوی مارکوف (Markov ineq.):

برای یک متغیر تصادفی نامنفی Y ($Y \geq 0$) با امید ریاضی مثبت $\mathbb{E}[Y]$ داریم:

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\lambda}$$

• نامساوی مارکوف (Markov ineq.):

برای یک متغیر تصادفی نامنفی Y ($Y \geq 0$) با امید ریاضی $E[Y]$ داریم:

$$P[Y \geq \alpha] \leq \frac{E[Y]}{\alpha}$$



$\alpha \cdot 1_{\{Y \geq \alpha\}} \leq Y$ برای $Y \geq 0$ داریم:

$\Rightarrow$

$$\alpha \cdot E[1_{\{Y \geq \alpha\}}] \leq E[Y]$$

$\hookrightarrow$ indicator func. (a random variable)

$\Rightarrow$

$$\alpha \cdot P[Y \geq \alpha] \leq E[Y]$$

$\Rightarrow$

$$P[Y \geq \alpha] \leq \frac{E[Y]}{\alpha}$$

* نامساوی چبیشف (Chebyshev)

برای متغیر تصادفی دلخواه Z با امید ریاضی و واریانس مشخص μ_Z و σ_Z^2

به طریق زیر عمل می‌کنیم.

متغیر نامنفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = (Z - \mu_Z)^2$$

نامساوی مارکوف برای Y :

$$P[(Z - \mu_Z)^2 \geq \alpha] \leq \frac{E[(Z - \mu_Z)^2]}{\alpha} = \frac{\sigma_Z^2}{\alpha}$$

(Note: In the original image, α is circled in red and ϵ^2 is written next to it. An arrow points from ϵ^2 to the circled α .)

$$\Rightarrow P[|Z - \mu_Z| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma_Z^2}{\epsilon^2}$$

Chebyshev inequality.

• نامساوی چبیشف:

• نامساوی چرnof :

با افعال نامساوی دارکت به روی متغیره تعارفی نامتنی e^{rz} بهست می آید:

$$\Rightarrow P[e^{rz} \geq \alpha] \leq \frac{E[e^{rz}]}{\alpha} = \frac{\phi_Z(r)}{\alpha} : \forall r \in I(Z)$$

← نامیه هکدرای ناچ مو در کشت در Z (یک یازه حول صفر)

برای بهت کردن راجله که قدری دهیم: $\alpha = e^{r\beta}$

$$\begin{cases} P[Z \geq \beta] \leq \phi_Z(r) e^{-r\beta} : \forall r > 0, r \in I(Z) \\ P[Z \leq \beta] \leq \phi_Z(r) e^{-r\beta} : \forall r < 0, r \in I(Z) \end{cases}$$

• برای پیدا کردن بهتین کمران که باید مقدار بهت راست یا لا ما به ازای β کیسه کرد.

• حالت خاص: نوشتن گران برای جمع n متغیر تصادفی iid:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad X_i \perp X_j, \quad X_i \sim X$$

$$\Rightarrow \phi_{S_n}(r) = [\phi_X(r)]^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}[S_n \geq n \cdot a] \leq [\phi_X(r)]^n e^{-ran} = [\underbrace{\phi_X(r) \cdot e^{-ra}}_{r > 0, I \in I(r)}]^n \\ \mathbb{P}[S_n \leq n \cdot a] \leq [\underbrace{\phi_X(r) e^{-ra}}_{\text{مجموعه اعداد کم از 1}}]^n : r < 0, r \in I(r) \end{cases}$$

• حالت خاص تر: اگر $X_i \in \{0, 1\}$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$\int_{0 < \delta < 1} \mathbb{P}[S_n \geq (1 + \delta) \mathbb{E}[S_n]] \leq \exp\left(-\frac{\delta^2 \mathbb{E}[S_n]}{3}\right)$$

• حالت خاص تر: اگر $X_i \in \{0,1\}$:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$\begin{cases} 0 < \delta < 1 & P[S_n \geq (1+\delta) \mathbb{E}[S_n]] \leq \exp\left(-\frac{\delta^2 \mathbb{E}[S_n]}{3}\right) \\ 0 < \delta < 1 & P[S_n \leq (1-\delta) \mathbb{E}[S_n]] \leq \exp\left(-\frac{\delta^2 \mathbb{E}[S_n]}{2}\right) \end{cases}$$

به صورت نمایی بر حسب n به سمت صفر می رود.