

قرایندهای تصادفی: جلسه 4 و 4 اکتبر 1399

* مطالب جلسه

- قانون اعداد بزرگ (weak law of large number ← WLLN)
- قضیه حد مرکزی (Central limit theorem)
- هکلهای متغیرهای تصادفی

* قانون اعداد بزرگ:

بررسی رفتار میانگین حسابی n متغیر تصادفی برای n های بزرگ

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

← یک متغیر تصادفی

Sample avg. میانگین نمونه

• فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی iid با ابعادی d و واریانس σ^2
↑ متغیر

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_n] = n\mu \quad , \quad \text{Var}[S_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n] = n\sigma^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu \\ \text{Var}[\bar{X}_n] = \text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\bar{X}_n}{n} - \mu\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$



با استفاده از نامساوی چبیشف:

$$\mathbb{P}\left[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right] \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

* تنهیه قانون ضعیف اعداد بزرگ

میانگین حسابی متغیرهای

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \quad \text{برای هر } n \geq 1 \quad \text{مقدار}$$

مقادیر X_i را با یکدیگر آنگاه:

* تعریف قانون ضعیف اعداد بزرگ

برای هر $n \geq 1$ مقدار $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ میانگین حسابی متغیرهای
مستقلاً از X_i ها باشد آنگاه:

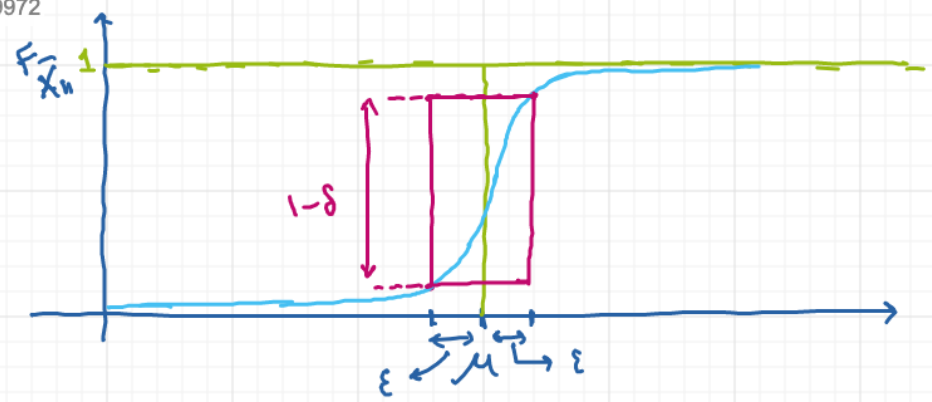
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon] = 0 \quad : \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\uparrow$
 $E[X_i]$

یک تعبیر دیگر از استقامت بالا :

$$\begin{aligned} P[|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon] &= 1 - \delta \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \\ &= P[\mu - \varepsilon \leq \bar{X}_n \leq \mu + \varepsilon] \\ \Rightarrow F_{\bar{X}_n}(\mu + \varepsilon) - F_{\bar{X}_n}(\mu - \varepsilon) &= 1 - \delta \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

برای همه ϵ



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{X}_n}(\alpha) = 0 & : \alpha < \mu \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{X}_n}(\alpha) = 1 & : \alpha > \mu \end{cases}$$

$$P[|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon]$$

ممکنه آخ: اگر برای X_1 ها بشود تابع مولد گشتا و رسم میکنم در

$$\leq P[\bar{X}_n \geq \mu + \epsilon] + P[-\bar{X}_n \geq -\mu + \epsilon]$$

ممکنه آخ: اگر ای X_i ها بیسود تابع
موله گشتا و رسم میکنم

$$P[|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon]$$

$$\leq P[\bar{X}_n \geq \mu + \epsilon] + P[-\bar{X}_n \geq -\mu + \epsilon]$$

chernoff $\rightarrow$

که به صورت نمایی بر حسب n به صفر میل میکنه.

* مقیاس حد مرکزی (Central Limit Theorem):

$$wLLN \rightarrow P[|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \epsilon$$

$$\downarrow$$
$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

فرقی کنه S_n را به صورت متفاوتی scale کنیم:

$$Z_n \triangleq \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[Z_n] = 0 \\ \text{var}[Z_n] = 1 \end{cases}$$

• قضیه حد مرکزی: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی iid با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 (هر دو متناهی) باشند.
آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{\overbrace{S_n - n\mu}^{= Z_n}}{\sigma \sqrt{n}} \leq \alpha \right] = \Phi(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(اینجا هگرای در توزیع را مشاهده می کنید).

• این قضیه در مورد متغیرهای تصادفی هم نتیجه می دهد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

* هگرای متغیرهای تصادفی:

• هگرای در توزیع (Convergence in dist.)

* همدای متغییه های قناری :

• همدای در توزیع . $\text{Convergence in dist.}$

• همدای در احتمال $\text{Conv. in probability}$

• همدای با معیار MS : $\text{Conv. with mean square Criteria}$

• همدای با احتمال 1 : $\text{almost sure convergence}$
 $\text{Conv. with prob. 1}$

• همدای در توزیع :

یک دنباله ای از متغییه های قناری باشد $X_1, \dots, X_n$ داریم . می گوییم ایی دنباله در توزیع به متغییه X همدای می شود اگر که :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(\alpha) = F_X(\alpha)$$

برای هر نقطه $\alpha \in \mathbb{R}$
که $F_X(\alpha)$ پیوسته باشد.

مثال: فرضی Y_i ها iid با توزیع $f_Y \Leftrightarrow Z_n = Y_n + \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ برای n های بزرگ توزیع $Z_n \sim f_Y$ میل می کند.

(که فرض کنیم که $Y \perp Y_i$)

همگرایی در احتمال: میگوییم یک دنباله متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ در احتمال به

متغیر X همگرا میشوند اگر که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| > \epsilon] = 0 \quad : \quad \forall \epsilon > 0$$

به عنوان مثال: می توان نتیجه گرفت برای m, n های به اندازه کافی بزرگ

سوال اینجاست {

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} P[|X_n - X_m| > \epsilon] = 0 \quad : \quad \forall \epsilon > 0$$

• همگرای یا معیار مربع متوسط (MS):

• یک‌گویی رتبه متغیرهای $X_1, \dots, X_n$ یا معیار MS به X همگرای شوند اگر که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

• رابطه انواع همگرای ها:

