

فرایندهای تصادفی: جلسه 5، 6، 9 اکتبر 1399

- * مطالب امروز (مفصل 9 کتاب با پولیس):
 - مفاهیم پایه و تعاریف مقدماتی فرایندهای تصادفی
 - خواص آماری فرایندهای تصادفی
 - فرایندهای تصادفی ایستا (Stationary Stochastic Processes)
 - فرایندهای تصادفی متناوب با میانگین Mean Square

* تعریف فرایند تصادفی

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\omega \rightarrow$ عدد

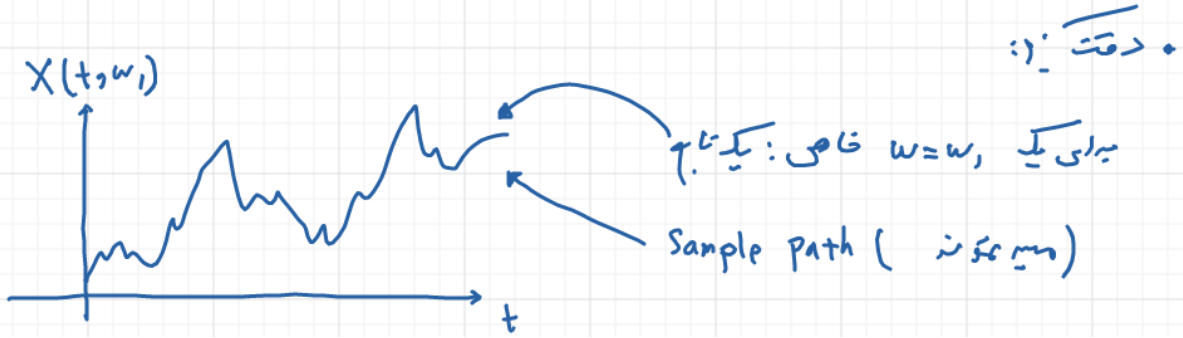
- از قبل به متغیر تصادفی
- فرایند تصادفی:

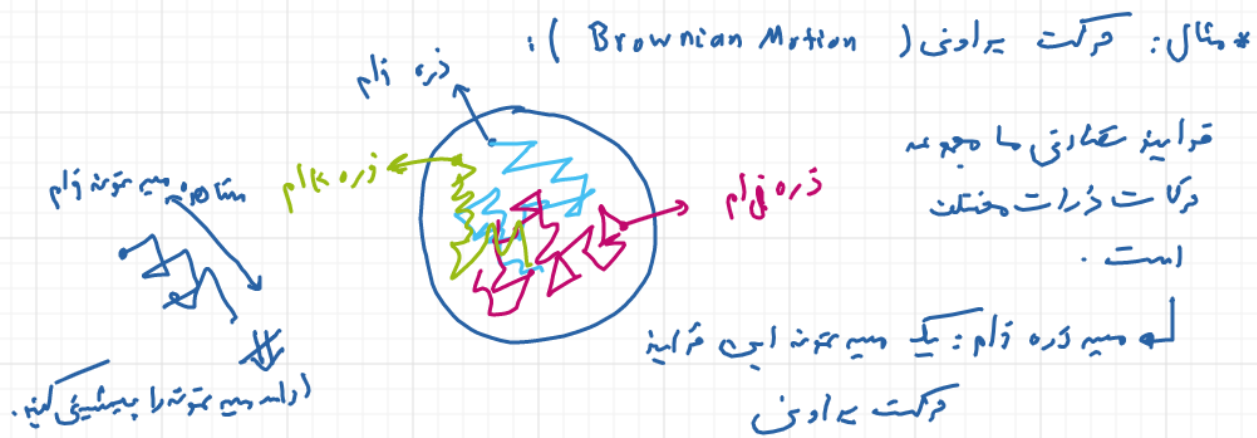
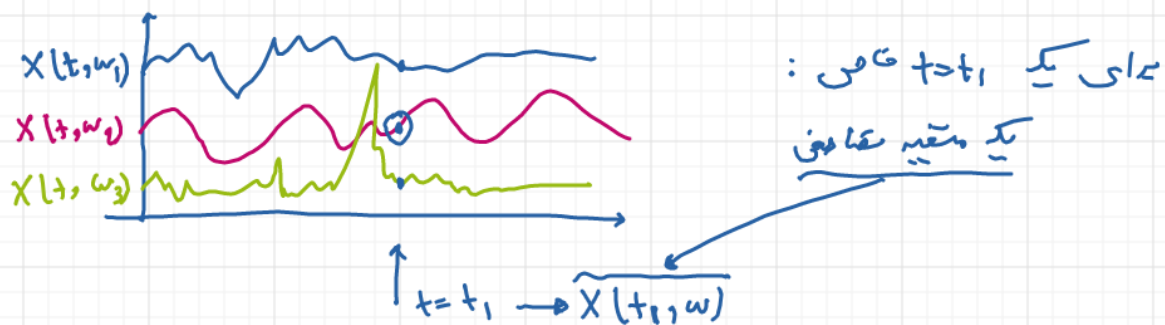
$$X(t, \omega): \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ یک تابع: $\forall \omega \in \Omega: X(t, \omega): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

اگر $R = \mathbb{R}$ ← یک فرایند مقادیر پیوسته در زمان داریم.
اگر R یک مجموعه گسسته باشد ← فرایند گسسته در زمان
 $\left\{ \begin{array}{l} \{X_n, n \in \mathbb{N}\} \\ \{X_n, n \in \mathbb{Z}\} \end{array} \right.$

- فرایند $X(t)$ ← پیوسته حالت (continuous state) اگر که $X(t)$ مقادیر نامتناهی به خودش بگیرد
- فرایند $X(t)$ ← گسست حالت (discrete state) اگر که $X(t)$ مقادیر شمارایی به خودش بگیرد.





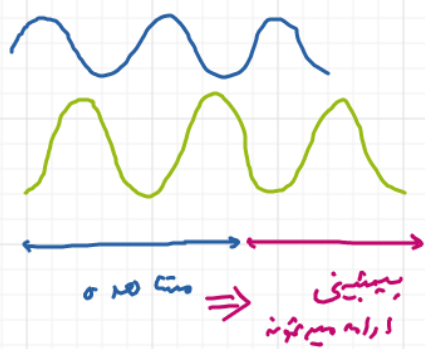
* مثال: قرایندهای $X(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(t) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

که عدد ثابت

دانه A و فاز Φ
متغیر زمانی هستند.

$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{cases} A(\omega_1) \\ \Phi(\omega_1) \end{cases}$
 $\omega = \omega_2$



یک موج پهنای باند
یک موج پهنای باند

* تمامی دو فرایند همبستگی:

• دو فرایند همبستگی $X(t)$ و $Y(t)$ برابر هستند اگر که:

فیلتر تعیین شده اندای است.

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) \quad : \forall t, \omega$$

• به طور متناهی به تعریف عملیات همبستگی بر روی فرایندها:

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \iff Z(t, \omega) = X(t, \omega) + Y(t, \omega)$$

• بهر فی تعارضیت راحت تر:

مثلا بهایری با معیار Mean Square : $\forall t: E[(X(t) - Y(t))^2] = 0$

$\Rightarrow X(t, \omega) = Y(t, \omega) \quad \forall t, \omega$

• خواص آماری مقایسه های مقادری:

• یک مقایسه مقادری به گونه در زمان $\leftarrow$ یک دنباله ناشایری از متغیرهای مقادری

• در هر لحظه از زمان $t \leftarrow$ یک متغیر مقادری $X(t)$ داریم $\leftarrow$ توصیف مثلا نمود CDF

آمارگان مرتبه اول: $F(x; t) = P[X(t) \leq x] \quad t: x$

$f(x; t) = \frac{\partial F(x; t)}{\partial x}$ $\leftarrow$ تابع چگالی آمارگان مرتبه اول هم: $\leftarrow$ تقریب کرد

• برای توصیف کامل یک مقایسه مقادری آمارگان مرتبه اول کافی نیست.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad : \text{مثال ۰}$
 $x_i \perp x_j$

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad , \quad y_1 = y_2 = y_3 = \dots$

آمارگان مرتبه دو قرایندهای:

$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2] \quad : \forall t_1, t_2$

$\xrightarrow[\text{تابع چگالی احتمال}]{\text{در صورت وجود}} \quad f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad : \forall t_1, t_2$

در نتیجه برای توصیف کامل قرایندهای $X(t)$ باید آمارگان مرتبه n ام آن را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ دانسته باشیم:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

$$\forall n, \forall t_1, \dots, t_n, \forall x_1, \dots, x_n$$

در بسیاری از کاربردها مثلا این ریاضی های نامرتبه دوم را لازم داریم. برای همین
آرگان مرتبه دوم برای خیلی از کاربردها کفایت می کند.

* امید ریاضی یک فرایند تصادفی:

تابعی از t : $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$

* خود همبستگی (auto correlation):

$$R(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

اگر متغیرهای تصادفی
بستگی نداشته باشند

نکته $\Rightarrow R(t_1, t_1) = \mathbb{E}[X(t_1)^2] \geq 0$

: auto Covariance *

$$C(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2))$$

$$= \mathbb{E} \left[(X(t_1) - \mu(t_1)) (X(t_2) - \mu(t_2)) \right]$$

نکته $\Rightarrow C(t, t) = Var[X(t)] = R(t, t) - [\mu(t)]^2$

$\Rightarrow = \mathbb{E} [X(t_1) X(t_2)] - \mu(t_1) \cdot \mu(t_2)$

$= R(t_1, t_2) - \mu(t_1) \cdot \mu(t_2)$