Whiteboard 7556417-6071-9937

فرایندهای تصادفی: جلسه 6 ، 11 اسفند 1399

---

* مطالب امروز

- ادامه بحث خواص آماری فرایندهای تصادفی
- فرایندهای تصادفی ایستا (Stationary stichastic processes)
- فرایندهای تصادفی متناوب با معیار Mean Square
- چند مثال برای فرایندهای تصادفی

---

* مرور جلسه قبل: خواص آماری یک فرایند تصادفی

برای توصیف یک فرایند تصادفی: آمارگان (توزیع) مرتبه n ام فرایند

$$F(x_1,\dots,x_n; t_1,\dots,t_n) \qquad \forall n, \; \forall t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}, \; \forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$$

- امید ریاضی فرایند: $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$

- خود همبستگی (auto correlation):

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)\cdot X^*(t_2)] = R_{XX}(t_2,t_1)^*$$

به آمارگان مرتبه دوم فرایند برای محاسبه نیاز داریم.

- auto Covariance

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}\left[X(t_1), X(t_2)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X(t_1) - \mu(t_1)\right)\left(X(t_2) - \mu(t_2)\right)^*\right]$$

$$= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu^*(t_2)$$

• مثال: فرض کنید یک فرایند تصادفی $X(t)$ داریم و کمیت S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \int_a^b X(t)\, dt$$

یک متغیر تصادفی

$$\mathbb{E}[S] = \int_a^b \mathbb{E}[X(t)]\, dt = \int_a^b \mu(t)\, dt$$

$$\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X(t_1)\, dt_1\right)\left(\int_a^b X(t_2)\, dt_2\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_a^b \int_a^b X(t_1) X(t_2)\, dt_1\, dt_2\right]$$

$$= \int_a^b \int_a^b \mathbb{E}\left[X(t_1) X(t_2)\right] dt_1\, d_2$$

$$= \int_a^b \int_a^b R(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

• تابع R_{XX} یک تابع مثبت نیمه معین است (Positive Semi definite):

یادآوری درمورد ماتریس های مثبت نیمه معین:

برای ماتریس مربعی (متقارن): $\forall\, z^T M z \geqslant 0 \iff$ ماتریس مثبت نیمه معین

بردار

$$\begin{bmatrix} z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} z \end{bmatrix} \geqslant 0 \quad : \forall z \in \mathbb{R}^n$$

تابع R_{XX} مثبت نیمه معین است یعنی:

$$\forall n,\ \forall t_1, \dots, t_n,\ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geqslant 0$$

عکس این حرف نیز درست است. یعنی اگر $R(t_1, t_2)$ یک تابع مثبت نیمه معین باشد
$\Leftarrow$ می‌شود یک فرایند تصادفی $X(t)$ پیدا کرد که R تابع خودهمبستگی آن باشد.

• مثال: فرایند $X(t) = A \cdot e^{j\alpha t}$

$A \to$ R.V.

$$\mathbb{R}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[A \cdot e^{j\alpha t_1} \cdot A^* e^{-j\alpha t_2}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[|A|^2\right] \cdot e^{j\alpha(t_1 - t_2)}$$

• ضریب همبستگی (Correlation Coeff.)

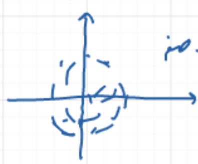
$$-1 \leqslant r_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant r_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}} \leqslant 1$$

↳ وابستگی خطی بین X و Y

$\Leftarrow$ r مقدار بزرگ (نزدیک 1)

r نزدیک ۱-



r تقریباً نزدیک صفر $\not\Rightarrow X \perp Y$

$$X \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0$$

با احتمال یکسان

$$y = x^2 \Rightarrow Cov[X,Y] = \cancel{\mathbb{E}[X^3]}^{=0} - \cancel{\mathbb{E}[X]}^{0} \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\Rightarrow r_{XY} = 0$$

• ضریب همبستگی برای فرایند تصادفی

$$-1 \leqslant r(t_1,t_2) = \frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{C(t_1,t_1)\cdot C(t_2,t_2)}} \leqslant +1$$

---

* Cross Correlation بین دو فرایند:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)\cdot Y(t_2)^*] = R_{YX}^*(t_2,t_1)$$

* Cross Covariance :

$$C_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right) \left(Y(t_2) - \mu_Y(t_2)\right)^* \right]$$

* دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ را متعامد گوییم $\iff$ $R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$

* — — — — ناهمبسته " (uncorrelated) $\iff$ $C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$

* استقلال دو فرایند تصادفی :

دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ مستقل هستند اگر برای هر n و هر $t_1, \dots, t_n$ و هر $t'_1, \dots, t'_n$ متغیرهای

$X(t_1), \dots, X(t_n)$ و $Y(t'_1), \dots, Y(t'_n)$ از هم مستقل باشند.

---

* فرایندهای ایستا (Stationary) :

• Strict Sense Stationary (SSS) :

• فرایند تصادفی $X(t)$ از نوع SSS است اگر که خواص آماری آن نسبت به جابجایی مبدا زمان تغییر نکند.

به عبارت دیگر فرایندهای $\{X(t)\}$ و $\{X(t+c)\}$ برای همه c ها خواص آماری یکسانی دارند.

$\forall n :$
$\forall t_1 \dots t_n$
$\forall x_1 \dots x_n$
$\forall c$

$$F(x_1, \dots, x_n ; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n ; t_1 + c, \dots, t_n + c)$$

• به عنوان مثال اگر آمارگان مرتبه اول را مستقل بگیریم:

$$F(x;t) = F(x;t+c) \quad : \forall c$$

$$\Rightarrow \quad F(x;t) = F(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X(t)] = \mu(t) = \mu$$