

قرایندهای مقادری: جلسه 7 6 6 16 آگست 1399

* مطالب امروز

- ادامه بحث قرایندهای مقادری ایسا
- قرایندهای مقادری متناوب یا معیار $Mean Square$
- چند مثال از قرایندهای مقادری
- Ergodicity

* قرایندهای مقادری ایسا (Stationary):

• Strict Sense Stationary (SSS):

↔ خواص آماری قرایندهای $\{X(t)\}$ و $\{X(t+c)\}$ برای هر c های ممکن مشابه باشند.

- دو قرایندهای مقادری $\{X(t)\}$ و $\{Y(t)\}$ توان (مشترک) ایسا هستند که خواص آماری مشترک $\{X(t)\}$ و $\{Y(t)\}$ و $\{X(t+c)\}$ و $\{Y(t+c)\}$ برابر باشند

(برای C های ممکن).

• از شرطی می توانیم نتیجه بگیریم :

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + C, \dots, t_n + C)$$

$$\forall n, \forall t_1, \dots, t_n, \forall x_1, \dots, x_n, \forall C$$

$\Rightarrow$ برای آرگومان مرتبه اول

$$F(x; t) = F(x; t + C) : \forall C$$
$$\Rightarrow F(x; t) = F(x)$$
$$\Rightarrow \mu_X(t) = \mu_X$$

$\Rightarrow$ به طور مشابه برای آرگومان مرتبه دوم

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; \overbrace{t_1 + C}^{\circ}, \overbrace{t_2 + C}^{\circ}) : \forall C$$

$\xrightarrow{C = -t_2}$ $\xrightarrow{t_1 - t_2}$

$$= F(x_1, x_2; t_1 - t_2)$$

$$\Rightarrow R(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = R(\underbrace{t_1 - t_2}_{=\tau}) = R(\tau)$$

: (wss) wide sense stationary.

قراینده $\{X(t)\}$ یک قراینده wss است آنکه دو خاصیت زیر را داشته باشد:

① $E[X(t)] = \mu$: امید ریاضی قراینده مستقل از زمان باشد

② $R(\underbrace{t+\tau}_{t_1}, \underbrace{t}_{t_2}) = E[X(t+\tau) X^*(t)] = R(\tau)$

به طور متناوب: تابع خود همبستگی را به شکل زیر هم می نویسیم:

$$R(\tau) = E[X(t+\tau/2) X^*(t-\tau/2)]$$

به طور خاص برای فرایند WSS ← مستقل از زمان : $\mathbb{E}[|X(t)|^2] = R(0)$
مستقل از زمان : $\text{Var}[X(t)] = \sigma_X^2$

مثال : فرقی کنید فرایند $X(t)$ ایسا و حقیقی باشد :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X(t+\tau) - X(t))^2] &= \\ &= \mathbb{E}[X(t+\tau)^2] + \mathbb{E}[X(t)^2] \\ &\quad - 2\mathbb{E}[X(t+\tau) \cdot X(t)] \\ &= 2R(0) - 2R(\tau) \end{aligned}$$

نکته : برای یک فرایند WSS داریم :

$$C(\tau) = R(\tau) - |\mu|^2 \quad : \text{auto Covariance}$$

$$r(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)} = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1) C(t_2, t_2)}} \quad : \text{Correlation Coef.}$$

• دو قراینه $\{X(t)\}$ و $\{Y(t)\}$ را مشك WSS می گیریم آنه هر کدام جداآنه WSS
باشند و همبستگی متقابل (Cross Correlation) به صورت زیر یانه:

$$R_{xy}(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau) Y^*(t)]$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_X \mu_Y^*$$

یا به طور مشابه

مثال: فرض کنید یک قراینه WSS با مقادیر حقیقی داشته باشیم:

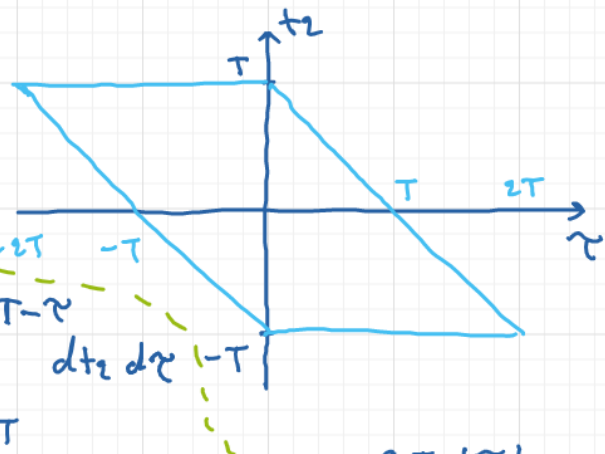
یک متغیر تصادفی $\rightarrow S = \int_{-T}^T X(t) dt \rightarrow \mu_S = 2T \cdot \mu_X$

سوال: $\text{Var}[S] = ?$

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \mathbb{E}[(S - \mu_S)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_{-T}^T X(t_1) dt_1 - \mu_S\right)\left(\int_{-T}^T X(t_2) dt_2 - \mu_S\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(X(t_1) - \underbrace{\frac{\mu_S}{2T}}_{=\mu_X}\right)\left(X(t_2) - \underbrace{\frac{\mu_S}{2T}}_{=\mu_X}\right) dt_1 dt_2\right] \end{aligned}$$

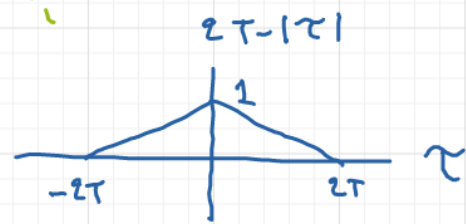
$$= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \underbrace{\mathbb{E}[(X(t_1) - \mu_X) \cdot (X(t_2) - \mu_X)]}_{\substack{\text{WSS: } X \rightarrow \\ = C(t_1 - t_2) = C(\tau)}} dt_1 dt_2$$

$t_1 - t_2 = \tau$

$$= \int_{-T}^T \int_{-T-t_2}^{T-t_2} C(\tau) d\tau dt_2$$


$$= \int_{-2T}^0 C(\tau) \int_{-T-\tau}^T dt_2 d\tau + \int_0^{2T} C(\tau) \int_{-T}^{T-\tau} dt_2 d\tau$$

$$= \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau$$



* قرائین طایی متنلوب با معیار Mean Square :

یک قرائین $\{X(t)\}$ با معیار MS قرائینی است که خاصیت زیر را دارا باشد:

$$\mathbb{E} \left[|X(t+T) - X(t)|^2 \right] = 0 \quad \forall t$$

متنلوب با معیار T

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0: \mathbb{P} \left[(X(t+T) - X(t))^2 > \epsilon^2 \right] \leq \frac{\mathbb{E} \left[(X(t+T) - X(t))^2 \right]}{\epsilon^2} = 0$$

Markov Ineq. $\uparrow$

$\Rightarrow \forall t$: we have $X(t+T) = X(t)$ with prob. near 1.

$$\Rightarrow \mu_X(t+T) = \mu_X(t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P} \left[\omega \in \Omega : X(t+T, \omega) = X(t, \omega), \forall t \right] \neq 1$$

• متغیر در هر دو قریب‌های متناوب با MS :

قرایب $\{X(t)\}$ متناوب با MS است اگر و فقط اگر که :

$$R(t_1 + mT, t_2 + nT) = R(t_1, t_2) : \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

↑ doubly periodic

انجا است : $\{X(t)\}$ متناوب $\leftarrow R$ doubly periodic

یادآوری : نامساوی کوچی-شوارتز برای متغیر تصادفی :

$$| \langle u, v \rangle |^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \text{در حالت کلی:}$$

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E[XY] \quad \text{متغیرهای تصادفی:}$$

نامساوی کوچی-شوارتز برای R.v. :

$$(E[ZW])^2 \leq E[Z^2] \cdot E[W^2]$$

$$Z = X(t_1)$$

$$W = X(t_2 + T) - X(t_2)$$

$$\mathbb{E} \left[X(t_1) (X(t_2 + T) - X(t_2)) \right]^2 \leq \mathbb{E} [X(t_1)^2] \underbrace{\mathbb{E} [(X(t_2 + T) - X(t_2))^2]}_{=0}$$

$$\Rightarrow R(t_1, t_2 + T) - R(t_1, t_2) = 0$$

اذا كان $\{X(t)\}$ متساوي التباين MS ، $\{X(t)\} \leftarrow R$ متساوي التباين.

$$R(t+T, t+T) = R(t+T, t) = R(t, t) \quad \leftarrow$$

$$\mathbb{E} [(X(t+T) - X(t))^2] = R(t+T, t+T) + R(t, t) - 2R(t+T, t)$$

$= 0 \Rightarrow \{X(t)\}$ Periodic with MS Criteria