

قرایندهای تصادفی: جلسه 8: 18 آگست 1399

* مطالب امروز:

- چند مثال
- Ergodicity
- بررسی سیستم‌ها با درونی تصادفی

* مثال:

• قرایندهای iid: $\{X(t)\}$ به این صورت تعریف شده است که

$$X(t) \sim F(x)$$

و برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t_1, \dots, t_n$

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1) \dots F(x_n)$$

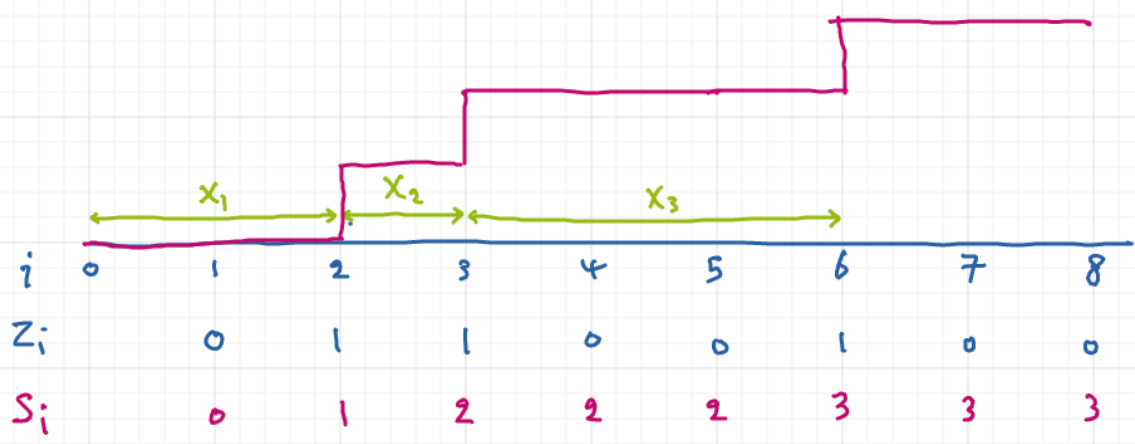
$\Leftrightarrow$ قرایندهای iid یک قرایندهای SSS

* مثال: فرایند برنولی (Bernoulli process):

یک فرایند زمانی گسسته: یک دنباله از متغیرهای تصادفی $Z_1, Z_2, \dots$ که iid

$P[Z_i=1]=p$, $Z_i \in \{0,1\}$

$P[Z_i=0]=1-p$



$$\begin{cases} X_i \sim \text{Geometrical}(p) & : \text{iid} \\ P[X_i=k] = p(1-p)^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n Z_i \sim \text{binomial}(n, p)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_i] = np$$

مثال: فرض کنید $\{X(t)\}$ یک فرایند تصادفی لوزی باشد.
فرایند $\{Y(t)\}$ را به صورت زیر از روی $\{X(t)\}$ بسازیم:

$$Y(t) = X(t) + 3X(t-1)$$
$$\left(Y(t, \omega) = X(t, \omega) + 3X(t-1, \omega) \right)$$

محاسبه گذشتن
فرایند $X(t)$ از یک
سیستم خطی متغیر ناپذیر
با زمان
احتمال ورودی $X(t)$

چرا می بینیم که فرآیند یک سیستم متغیر ناپذیر با زمان
به یک فرایند SSS یک فرایند SSS دیگر است.



* Ergodicity :

• در حالت کلی: هدف این است که از مشاهدات $\leftarrow$ تعیین پaramترهای فرایند تصادفی

در بسیاری مواقع این پaramترها به صورت امید ریاضی
نتایج از فرایند تصادفی مورد نظر نوشته می شوند

• به صورت خاص امید ریاضی فرایند $\{X(t)\}$ را در نظر می گیریم:

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

سوال: برای تعیین $\mu(t)$ چکار کنیم؟

برای تعیین $\mu(t) \leftarrow n$ مشاهده $X(t, \omega_1), \dots, X(t, \omega_n)$

طبق قانون اعداد بزرگ:

$$\hat{\mu}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(t, \omega_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(t)$$

(با افزایش n این تعیین بیجه و بیجه می شود)

سوال: اگر فقط دسترسی به یک مسیر نمونه (sample path) داشته باشیم چه حرفی در مورد تغییرات $\mu(t)$ می توانیم بزنیم.

برای پاسخ به این سوال قورمان مایه قرائنهای ایستا محدودی کنیم:

$$\mu(t) = \mu$$

سوال: آیا μ می توانیم μ را از میانگین زمانی یک مسیر نمونه تعیین بزنیم؟

• قرائنهای mean-ergodic
فوقی: یک قرائن ایستا (واقعی) داریم.

$$\mu = \mathbb{E}[X(t)]$$

متغیر تصادفی $\rightarrow \mu_T \triangleq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$

$$\mathbb{E}[\mu_T] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underbrace{\mathbb{E}[X(t)]}_{=\mu} dt = \mu \quad \Bigg| \quad \text{دقت کنیم:}$$

← تغییر دادن پایه برای بارانه

پای برای کیفیت نخب ← بررسی $\text{Var}[\mu_T]$

• تعریف: قرارین $\{X(t)\}$ mean-ergodic است اگر که متوسط زمانی μ_T با افزایش T به متوسط گروهی μ میل کند
ensemble average

• مثال: فرض کنید متغیر تصادفی A با امید ریاضی μ_A و قرارین $\{X(t)\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X(t, \omega) = A(\omega) : \forall t$$

$$\Rightarrow \text{صورت خلاصه} \quad X(t) = A \quad ; \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \mu = \mathbb{E}[X(t)] = \mu_A$$

میانگین
زمانی

همیشه نمونه‌های این فرایند $X(t)$ یک سری خط افقی هستند.
 $\mu_T = A$

به بیان دقیق‌تر: برای یک مشاهده خاص $\omega \in \Omega$ داریم:
 $\mu_T(\omega) = A(\omega)$
که یک عدد ثابت است که لزوماً

برابر $\mu = \mu_A$ فرایند $\{X(t)\}$ نیست. $\leftarrow$ فرایند mean-ergodic نیست.

مثال: فرض کنید $\{X_1(t)\}$ و $\{X_2(t)\}$ mean-ergodic باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1(t) = E[X_1(t)] = \mu_1 \\ \mu_2(t) = \mu_2 \end{cases}$$

یک فرایند جدید سازیم با کمک یک متغیر تصادفی $A \in \{0,1\}$ ؛ احتمال $\frac{1}{2}$.
 A مستقل از فرایند X_1, X_2 .

$$X(t) = X_1(t) + A X_2(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_2$$

نمونه‌ای یک ω خاص: $A(\omega) = 0$: ~~میانگین~~ $X(t) = X_1(t)$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \mu_1 \neq \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_2$$

برای ω خاص که $A(\omega) = 1$: ~~میانگین~~ $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \mu_1 + \mu_2 \neq \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_2$$

$\nRightarrow$ $\{X(t)\}$ mean-ergodic نیست.



(قوانین آسان و دقیق)

• بررسی شرط mean-ergodic بودن:

$$\mu_T = \frac{1}{2T} \underbrace{\int_{-T}^T X(t) dt}_{= S} \rightarrow \mathbb{E}[\mu_T] = \mu$$

$$\text{Var}[\mu_T] = \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) C(\tau) d\tau$$

برای فرایند واقعی : $C(\tau) = C(1-\tau)$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) C(\tau) d\tau$$

معنی: یک فرایند (ایستا و واقعی) $X(t)$! auto-covariance $C(\tau)$ یک فرایند mean-ergodic است اگر و فقط اگر که

$$\text{Var}[\mu_T] = \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) C(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

برای تغییر μ_T داریم: $\mu_T \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{m.s.}} \mu$

• قضیه Slutsky :

فرایند حقیقی وایسای $\{X(t)\}$ mean-ergodic است اگر و فقط اگر

$$\frac{1}{T} \int_0^T c(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

• شرایط کافی برای mean-ergodic بودن فرایند مقادیری :

$$\int_0^\infty c(\tau) d\tau < \infty \tag{1}$$

یا

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c(\tau) = 0 \tag{2}$$

تحقی مقیمه‌های $X(t)$ و $X(t+\tau)$ برای τ های بزرگ ناهمبسته باشند.