

قرایندهای مقادری: جلسه 9 و 6 23 آگست 1399

* مطالب امروز

یک مثال از میوت ergodicity

• بررسی سیستم ها با ورودی مقادری

• مثال: قرایندهای مقادری زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{r.v.}}}{A} \cos \alpha t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{r.v.}}}{B} \sin \alpha t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Const}}}{C}$$

تا لحظه:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[A \cdot B] = \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[B] \\ \mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = 0 \\ \text{Var}[A] = \text{Var}[B] = \sigma^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A] \cos \alpha t + \mathbb{E}[B] \sin \alpha t + \mathbb{E}[C]$$

$= c$ ①

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(X(t_1) - c)(X(t_2) - c)] \\ &= \mathbb{E}[(A \cos \alpha t_1 + B \sin \alpha t_1)(A \cos \alpha t_2 + B \sin \alpha t_2)] \\ &= \mathbb{E}[A^2] \cos \alpha t_1 \cos \alpha t_2 + \mathbb{E}[B^2] \sin \alpha t_1 \sin \alpha t_2 \\ &= \sigma^2 \cos \alpha(t_1 - t_2) = \sigma^2 \cos \alpha \tau \quad \text{②} \end{aligned}$$

①, ② $\Rightarrow$ $\{X(t)\}$ WSS

سوال: $\{X(t)\}$ mean-ergodic است یا خیر؟

نتیجه (slutsky):

قرایندهای $\{X(t)\}$ WSS و mean-ergodic است

$$\frac{1}{T} \int_0^T c(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \iff$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 \cos \alpha(\tau) d\tau = \frac{\sigma^2}{\alpha T} \sin \alpha T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ mean ergodic $\{X(t)\}$

* بررسی سیستم ها با ورودی متغیری:

فرض کنیم یک $\{X(t)\}$ داریم و توسط متغیرهای به هم وابسته نمونه آن مانند $X(t, \omega_i)$
یک سری نمونه دیگر مانند $Y(t, \omega_i)$ ثبت دهیم. به صورت خلاصه

$$Y(t) = T[X(t)]$$

که، رفتار سیستم توسط همگلد $T[\cdot]$ توصیف می شود.

• سیستم مورد نظر غیر عشاقی (deterministic) :
همگرا T فقط بر روی متغیر زمان عمل کند و کاری به ω نداشته باشد :

$$X(t, \omega_1) = X(t, \omega_2) \Rightarrow Y(t, \omega_1) = Y(t, \omega_2)$$

• سیستم عشاقی (Stochastic) :

$$X(t, \omega_1) = X(t, \omega_2) \not\Rightarrow Y(t, \omega_1) = Y(t, \omega_2)$$

در ادامه به بررسی سیستم های غیر عشاقی ✓

علی القاعده اگر $\{X(t)\}$ و $T[.]$ وابسته باشیم می توان T را گان $\{Y(t)\}$ را جایگزین کنیم.
در ادامه دو حالت خاص معر را بررسی می کنیم.
• سیستم های بدون حافظه :

$$Y(t) = g(X(t))$$

$\hookrightarrow g(x)$

چون قوی در لحظه t فقط به ورودی در لحظه t ربط دارد.

سوال: از روی آمارگان $\{X(t)\}$ و مقاصد و چگونه آمارگان $\{Y(t)\}$ را بیابیم!

فرض: توان چگالی افعال قدامت $\{X(t)\}$ و $\{Y(t)\}$ دیردراکنه باشند.

در مورد آمارگان مرتبه اول قدامت $\{Y(t)\}$:

$$f_Y(y; t) = \frac{f_X(x_1; t)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2; t)}{|g'(x_2)|} + \dots$$

یادآوری: اگر X و Y دو متغیر تصادفی و $Y = g(X)$

این رابطه از برای هر $g \in \mathbb{R}$ معادله $y = g(x)$ را به سبب x ها حل می کنیم:

مربعی کنیم $x_1, \dots, x_n$ جواب های معادله بالا باشند:

$$y = g(x_1) = \dots = g(x_n)$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

قرایندها
به صورت خاص برای این ریاضی لازم داریم :

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; t) dx$$

در حالت کلی هم می توانیم آمارهای مرتبه نام $Y(t)$ را حساب کنیم :

$$Y(t_1) = g(X(t_1)), \dots, Y(t_n) = g(X(t_n))$$

$$f_Y(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n) = ?$$

باید دستگاه معادلات ترسیم را حل کنیم :

$$\begin{cases} y_1 = g(x_1^{(1)}) \\ \vdots \\ y_n = g(x_n^{(n)}) \end{cases}$$

بنای واقعی قرضی کنیم که دستگاه یک جواب دارد:

$$f_y(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^K \frac{f_x(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}; t_1, \dots, t_n)}{|g'(x_1^{(i)}) \dots g'(x_n^{(i)})|}$$

• مقصود: با استفاده از روابط بالا اگر $\{X(t)\}$ یک فرایند SSS باشد و از یک سیستم بدون حافظه گذر کند ما تندی سیستم هم یک فرایند SSS است.

اثبات: به علت اینکه خروجی رابطه بالا به زمان بستگی ندارد.

• مشابه این برای معنی و تابع خود همبستگی فرایند Y را هم می توانیم به صورت مستقیم حساب کنیم:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) \cdot g(x_2) f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

سیستم های خطی تغییرناپذیر یا زمان (LTI) Linear Time Invariant:

سیستم خطی $L[\cdot]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$L[a X_1(t) + b X_2(t)] = a L[X_1(t)] + b L[X_2(t)]$$

(تقریب کرده به ریج سیستم ما تغییر نمی آید) است $\leftarrow$ a و b می توانند مقیاس های مقیاسی هر یک باشند

یک سیستم تغییرناپذیر به زمان است اگر که

$$X(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow Y(t) \Rightarrow X(t+c) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow Y(t+c)$$

می توانیم سیستم های خطی تغییرناپذیر یا زمان را برای ورودی مقیاسی بررسی کنیم.

از ملاحظه سیستم های LTI می دانیم که یک پاسخ متبداً $h(t)$ برای این سیستم ها



تقریب تابع $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\alpha) g(t) dt = g(\alpha)$$

فردی سیستم به ازای ورودی $x(t)$:

$$\Rightarrow y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\alpha) x(\alpha) d\alpha$$

فردی سیستم به ازای ورودی متناهی $\{X(t)\}$:

$$Y(t) = (X * h)(t)$$

مقتضی: اگر ورودی یک سیستم LTI یک متناهی SSS باشد، فردی آن هم یک متناهی SSS است.

$$P \left[\underbrace{L[X(t)](t_1)}_{=Y(t_1)} \leq \gamma_1, \dots, \underbrace{L[X(t)](t_n)}_{Y(t_n)} \leq \gamma_n \right]$$

$$= P \left[\underbrace{L[X(t)](t_1+c)}_{Y(t_1+c)} \leq y_1, \dots, \underbrace{L[X(t)](t_n+c)}_{Y(t_n+c)} \leq y_n \right]$$

تغییر متغیر یا جابجایی

$$= P \left[L[X(t-c)](t) \leq y_1, \dots, L[X(t-c)](t_n) \leq y_n \right]$$

سلسله $\{X(t)\}$

$$= P \left[L[X(t)](t) \leq y_1, \dots, L[X(t)](t_n) \leq y_n \right]$$

سلسله $\{Y(t)\}$