

فرايندهای مخابراتی : جلسه ۱۵ ۶ ۱۴ فورریین ۱۴۰۰

* مطالب امروز :

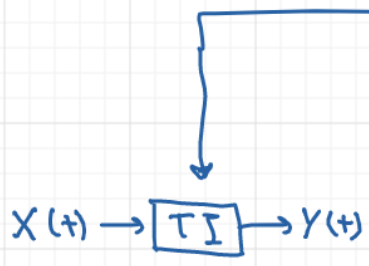
• بررسی سیستم‌ها با ورودی مخابراتی

• طيف توان (Power spectrum)

* مرور :

سیستم‌های خطی ثابت با زمان (LTI) :

$$L[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 L[x_1(t)] + a_2 L[x_2(t)]$$



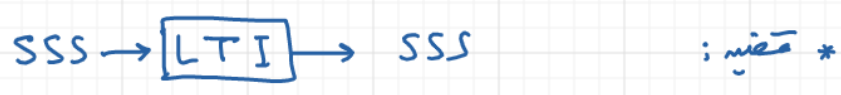
$\Rightarrow X(t+c) \rightarrow [TI] \rightarrow Y(t+c)$

• برای سیستم های LTI داشتن $L[\delta(t)]$ کافی است تا خروجی

$h(t) =$ پاسخ ضربه

مسئله رابطه ای هر ورودی به خروجی.

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\alpha) x(\alpha) d\alpha$$



* بیان دیگران متبادله ورودی یک سیستم LTI به حسب ورودی آن و نتایج ضربه

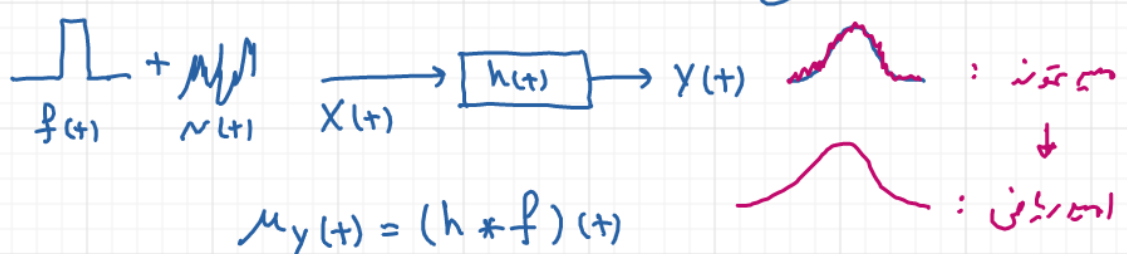
• قضیه: برای یک سیستم LTI :

$$\mu_{y(t)} = \mathbb{E} \left[L[X(t)] \right] = L \left[\mathbb{E}[X(t)] \right]$$

حل:

$$\begin{aligned}\mu_y(t) &= \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha = (\mu_x * h)(t) \\ &= L[\mu_x(t)]\end{aligned}$$

مثال: فرض کنید:
 $X(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{له نتایج غیر متغیری}} + \underbrace{N(t)}_{\substack{\text{فرایند متغیری} \\ \text{با امپد ریاضی}}}$



$$\mu_y(t) = (h * f)(t)$$

خود همبستگی خروجی یک سیستم LTI بر حسب ورودی و نتایج ضربه:



$\hookrightarrow R_{xx}(t_1, t_2)$

$\hookrightarrow R_{yy}(t_1, t_2)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = L_2 [R_{xx}(t_1, t_2)]$$

↑
عمل روی تابع ورودی L₂

$$R_{yy}(t_1, t_2) = L_1 [R_{xy}(t_1, t_2)]$$

↑
عمل روی تابع ورودی L₁

اثبات مرحله اول :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [X(t_1) Y(t_2)] = \mathbb{E} \left[X(t_1) \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_2 - \alpha) h(\alpha) d\alpha \right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E} [X(t_1) X(t_2 - \alpha)]}_{R_{xx}(t_1, t_2 - \alpha)} h(\alpha) d\alpha$$

$$= R_{XX}(t_1, t_2) * h(t_2) = L_2 \left[R_{XX}(t_1, t_2) \right]$$

↑
کانولوشن روی t_2

$$R_{YY}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2) \quad \text{به طور مشابه:}$$

$$= L_1 \left[L_2 \left[R_{XX}(t_1, t_2) \right] \right] = L_2 \left[L_1 \left[R_{XX}(t_1, t_2) \right] \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta$$

$$\begin{cases} C_{XY}(t_1, t_2) = C_{XX}(t_1, t_2) * h(t_2) \\ C_{YY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t_1, t_2) * h(t_1) \end{cases} \quad \Leftarrow \text{به طور مشابه:}$$

• **توجه:** اگر ورودی یک سیستم LTI یک متغیر WSS باشد $\rightarrow$ خروجی هم WSS است.

اثبات: $\mu_y(t) = L[\mu_x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mu_x(t-\alpha)}_{=\mu_x} h(\alpha) d\alpha$ ← $X: WSS$

$= \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha \Rightarrow \mu_y(t) = \mu_y$ ①

یک عدد ثابت از زمان → یک عدد ثابت

برای خود همبستگی فردی:

$R_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_{xx}(t_1-\alpha, t_2-\beta)}_{R_{xx}(\underbrace{t_1-t_2+\beta-\alpha}_{\tau})} h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta$

$= R_{yy}(t_1-t_2) = R_{yy}(\tau)$ ②

①, ② $\Rightarrow Y: WSS$

نتیجه: X و Y همبستگی WSS می باشد.

Whiteboard 7714026-3900-7079 $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_2) = \dots = R_{xy}(t_1 - t_2)$

مثال: سیستم مشتق گیر ← یک سیستم LTI است.

$$L[X(t)] = X'(t)$$

داریم: $\mu_{x'}(t) = L[\mu_x(t)] = [\mu_x(t)]'$

صورتی برای خود رصبتی:

$$R_{xx'}(t_1, t_2) = L_2[R_{xx}(t_1, t_2)] = \frac{\partial R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_2}$$

$$R_{x'x'}(t_1, t_2) = L_1[R_{xx'}(t_1, t_2)] = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

حال فرض می کنیم $X(t)$ یک فرایند WSS باشد.

$$\Rightarrow \mu_{x'}(t) = \underbrace{[\mu_x]'}_{یک عدد ثابت} = 0$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1 - t_2) \Rightarrow R_{\underset{(t_1, t_2)}{x'x'}} = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1 - t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$
$$= - \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2} = R_{x'x'}(\tau)$$

* طیف توان (Power spectrum):

$$x(t) \xrightarrow{F} \hat{x}(\alpha)$$

↑
تأیید فرکانسی

• برای سیگنال های غیر تصادفی:
(deterministic)

• تعریف طیف توان یک فرایند تصادفی WSS (مطمئن یا مختلط):

$$R(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)X^*(t)]$$

طیف توان:

$$S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \underbrace{e^{-j\alpha\tau}}_{= \cos\alpha\tau - j\sin\alpha\tau} d\tau$$

↑
تأیید فرکانسی

$\Rightarrow$ معکوس تبدیل فوری $R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha) e^{j\alpha\tau} d\alpha$

نکته: $R(-\tau) = R^*(\tau) \iff S(\alpha) \text{ حقیقی از } \alpha$

معیه {Wiener-Khinchin}: $S(\alpha) \geq 0$

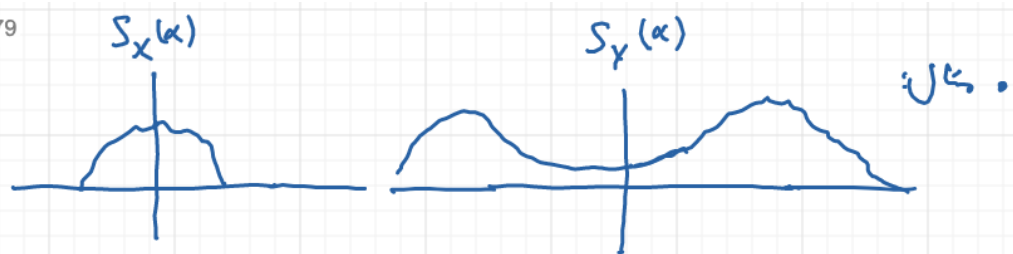
• تغییر طیف توان:

یک میانگین توانی $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = P$: توان یک قدایه

$E[P] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{S(\alpha)}_{\substack{\text{طیف توان} \\ \text{قدایه } X}} d\alpha$
↑ معیه

$S_X(\alpha)$

$S_Y(\alpha)$



• اچھا طریقہ تو ان کو درجی دو درجی کے لیے LTI : $X(t) \xrightarrow{h(t)} Y(t)$

$$\begin{cases} R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) \\ R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau) * h(\tau) \end{cases}$$

فاصلہ تبدیل کرنے پر $x(t) * h(t) \xrightarrow{F} \hat{x}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= S_{xx}(\omega) H^*(\omega) \\ S_{yy}(\omega) &= S_{xy}(\omega) H(\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

مسابه خاصیت فیلتر کردن
سیستم های LTI به ای سیگنال های غیر مستقیم