

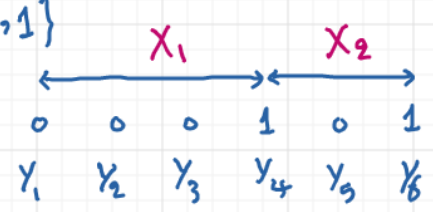
فرایندهای تصادفی: جلسه 11 و 16 خرداد 1400

* مطالب امروز

- معرفی فرایندهای arrival و renewal
- فرایند تصادفی پواسن
- خاصیت بدون حافظه بودن یک متغیر تصادفی
- برخی خواص فرایند تصادفی پواسن

• فرایند پرنوی (سفر گسسته فرایند پواسن): $\{Y_n \text{ و } n \geq 1\}$

$Y_i \in \{0, 1\}$

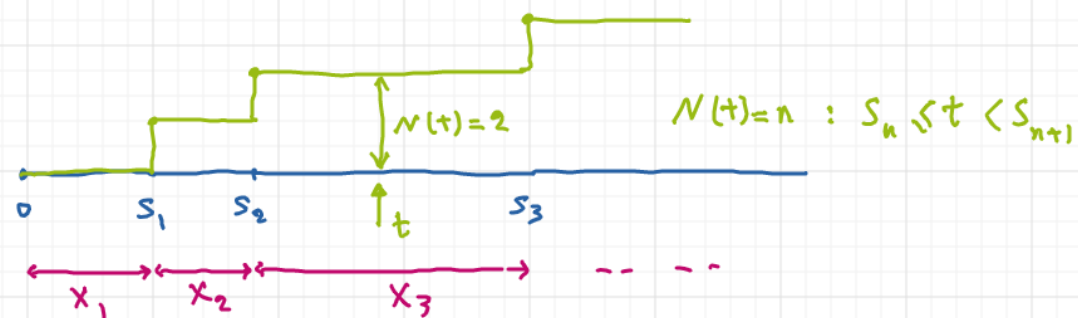


Y_i ها لایز و پرنوی
 X_i ها: لایز و هندسی

• فرایندهای ورودی arrival :

یک دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $0 < S_1 < S_2 < S_3 \dots$

$\Leftarrow X = S_{i+1} - S_i \leftarrow$ متغیر تصادفی مثبت و $F_X(0)=0$



$X_1 = S_1, \quad X_i = S_i - S_{i-1} \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n X_n$

• فرایند شمارشی یا Counting process :

$\{N(t) \geq t\}$: تعداد ورودها در بازه $[0, t]$

$$\forall t \geq \tau \Rightarrow N(t) \geq N(\tau)$$

• لم : برای هر $n \geq 0$ و هر $t \geq 0$ زمان ورود n ام یعنی S_n و متغیر تصادفی $N(t)$ به صورت زیر به هم مربوط هستند :

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$$

↑
برابری در واقع

اثبات : اول فرض می‌کنیم که $\{S_n \leq t\}$ اتفاق افتاده است.

$$\begin{aligned} S_n = \tau \Leftrightarrow N(\tau) = n &\Leftrightarrow \tau \leq t \\ \{S_n \leq t\} \subseteq \{N(t) \geq n\} &\Leftrightarrow N(t) \geq n \end{aligned}$$

از طرف دیگر : فرض می‌کنیم $\{N(t) \geq n\}$ و $N(t) = m$ و $m > n$

$$\{N(t) \geq n\} \subseteq \{S_n \leq t\} \quad \Leftarrow S_m \leq t \quad \Leftarrow$$

در نتیجه : اثبات لم ✓

• فرایند renewal : فرایند ورودی است که فاصله بین دو ورودی iid هستند.

• فرایند بواسن : یک فرایند renewal است که فاصله بین دو ورودی یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی است. X_i ها iid هستند و تابع چگالی احتمال زیر را دارند:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

• خاصیت بدون حافظه بودن (Memoryless Property) :
متغیر تصادفی مثبت X خاصیت بدون حافظه بودن $\perp$ دارد اگر که

$$P[X > s+t] = P[X > s] \cdot P[X > t] : \forall s, t \geq 0$$

برای توزیع نمایی این خاصیت برقرار است.
CDF : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow P[X > x] = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

• معنی: اگر یک متغیر تصادفی پیوسته مثبت، خاصیت بدون حافظه بودن داشته باشد، آن متغیر توزیع نمایی دارد. ← سوال امتحانی ناچله بهم

• دیدیم متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه نمایی است ← $P[X > t] = e^{-\lambda t}$

یعنی تعریف معادل بدون حافظه بودن:

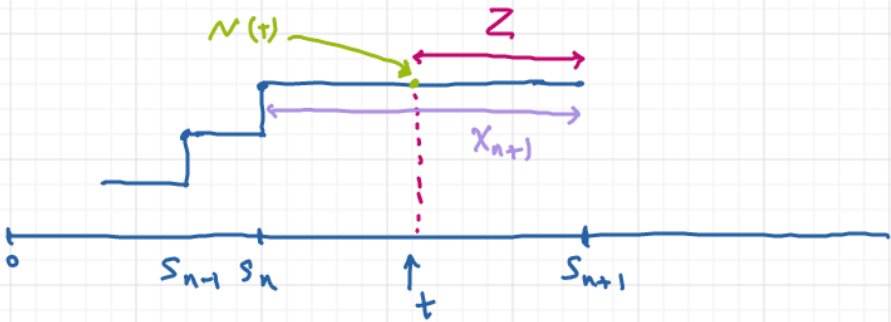
$$P[X > t+x | X > t] = P[X > x]$$

• با استفاده از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی

* متغیر: برای یک قدراینه متغیری بهمان یا توزیع λ و برای $t > 0$ طول بازه از t تا اولین ورود بعد از زمان t یک متغیر متغیری مثبت Z با تابع توزیع تجمعی $1 - e^{-\lambda Z}$ است. این متغیر متغیری مستقل از

① $N(t)$ و $N(t)$ زمان ورود قبل از t

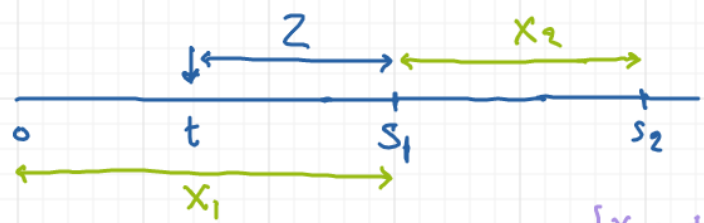
② متغیرهای متغیری $\{N(\tau); \tau \leq t\}$ است.



اثبات: فرض کنیم Z فاصله بین t تا اولین ورودی بعد از t باشد. هر دو به یک
محاسبه $P[Z > z]$ است.

در قدم اول:

$$P[Z > z | N(t) = 0] = ?$$



$$P[Z > z | N(t) = 0] = P[X_1 > z + t | N(t) = 0]$$

$$= P[X_1 > z + t | X_1 > t]$$

بدون حافظه بیان X_1 → $= P[X_1 > z] = e^{-\lambda z}$

در قدم دوم: $(\forall n \geq 1, \forall t \geq 0)$:

$$P[Z > z | N(t) = n, S_n = \tau]$$

$$\begin{aligned} &= P[X_{n+1} > z + t - \tau \mid \underbrace{N(t) = n, S_n = \tau}_{\substack{\uparrow \\ X_{n+1} > t - \tau}}] \\ &= P[X_{n+1} > z + t - \tau \mid \underbrace{X_{n+1} > t - \tau, S_n = \tau}_{\substack{\searrow \\ \sum_{i=1}^n X_i}}] \end{aligned}$$

$$\underbrace{X_{n+1} \perp S_n}_{\substack{\text{مستقل بودن} \\ \text{میان } X_{n+1} \text{ و } S_n}} = P[X_{n+1} > z + t - \tau \mid X_{n+1} > t - \tau] = P[X_{n+1} > z] = e^{-\lambda z}$$

مثال یا استفاده از قانون احتمال کل (law of total probability):

$$\begin{aligned} P[Z > z \mid B_i] &= f(z) \quad \forall i \\ \bigcup_i B_i &= \Omega \end{aligned}$$

$$\text{قانون احتمال کل: } P[Z > z] = \underbrace{\sum_i P[Z > z \mid B_i] \cdot P[B_i]}_{= f(z)} = f(z)$$

$\Leftarrow$ قسمت اول مقصود اثبات می شود که یعنی: $z > 0$, $P[Z > z] = e^{-\lambda z}$

• هر دوتایی که یا لازم های توانیم برای اقبال زیر هم بنویسیم:

$P[Z > z | N(t) = n, S_n = \tau_n, S_{n-1} = \tau_{n-1}, \dots, S_1 = \tau_1], n = N(t)$
 $= e^{-\lambda z}$

$\Rightarrow Z \perp (N(t), S_n, \dots, S_1), n = N(t)$

اثبات قسمت دوم ✓
این دو مجموعه متغیر تصادفی معادل هم هستند
 $\{N(t); \tau_{\leq t}\}$
در نهایت

$\rightarrow P[Z > z | \{N(t); \tau_{\leq t}\}] = e^{-\lambda z}$

$\Rightarrow Z \perp \{N(t); \tau_{\leq t}\}$ ✓ اثبات قسمت سوم