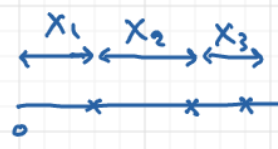


قرایندهای تصادفی: جلسه ۱۲ ۶ ۲۱ فروردین ۱۴۰۰

* مطالب این جلسه

- خواص $\text{Stationary increment}$ و $\text{independent increment}$ قرایندهای
- تابع چگالی احتمال S_n و تابع چگالی احتمال مشترک S_1 و ... و S_n
- تابع جری احتمال متغیر تصادفی $N(t)$

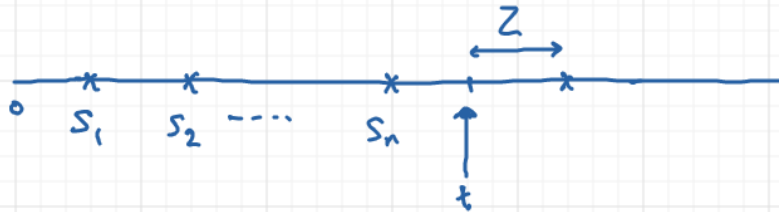
* مرور جلسه قبل



$X_i \text{ iid } \sim \exp(\lambda)$

قرایندهای یا نرخ λ

* مرور متغیر جلسه قبل:



① $P[Z > z | N(t) = n, S_n = \tau] = e^{-\lambda z} \quad \forall n, \forall \tau$

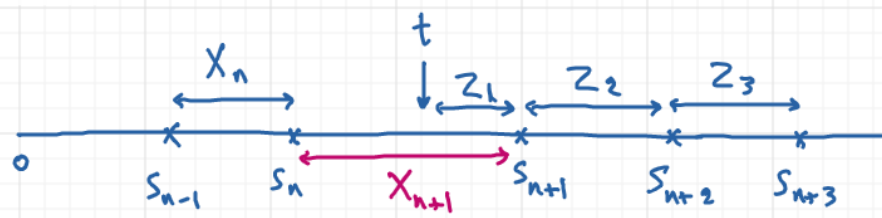
② $P[Z > z | N(t) = n, S_n = \tau_n, \dots, S_1 = \tau_1] = e^{-\lambda z} \quad \forall n$
 $\forall 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$

① $\xrightarrow{\delta t / \delta z \rightarrow 0}$ $P[Z > z] = e^{-\lambda z} \Rightarrow z \sim \text{exp}(\lambda)$

$\downarrow$ ①'
 $Z \perp N(t), S_{N(t)}, \dots, S_1$

$\downarrow$
 $Z \perp \{N(\tau); \tau \leq t\}$

* اداله ماير :



$Z_m = X_{m+n} : m \geq 2$

متناهي اثبات قضيه قبل ما مي توانيم قضيه زير را اثبات كنيم

$\forall t > 0, \forall k: Z_1, \dots, Z_k \perp N(t), S_{N(t)}, \dots, S_1$

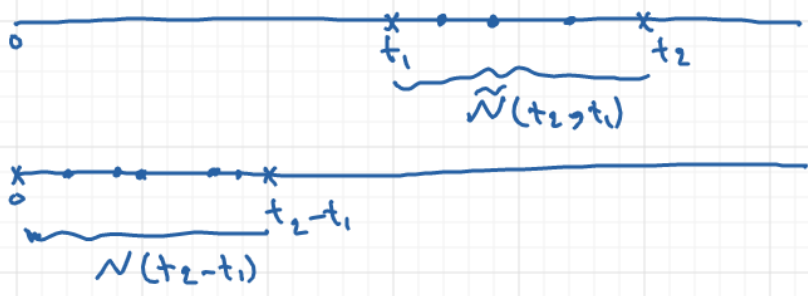
$\Leftrightarrow Z_1, \dots, Z_k \perp \{N(\tau); \tau \leq t\}$

همچنين : $Z_i \text{ iid } \sim \exp(\lambda)$

$\Leftarrow$ بعني از قوانين بيراني كه از زمان دلخواه $t > 0$ شروع مي شود همان خواص آزادي قوانين بيراني را دارد كه از زمان 0 شروع مي شود.

* تعریف: برای قرائت گارش $N(t)$ (سعدار و رورده در بازه $(0, t]$)
برای هر $t_2 > t_1 > 0$ تعریف میکنیم
$$\tilde{N}(t_2, t_1) = N(t_2) - N(t_1)$$

* تعریف: Stationary increment property
یک قرائت گارش $N(t)$ این خاصیت را دارد اگر که برای هر $t_2 > t_1 > 0$
متغیر تصادفی $\tilde{N}(t_2, t_1)$ و $N(t_2 - t_1)$ توزیع یکسانی داشته باشند.

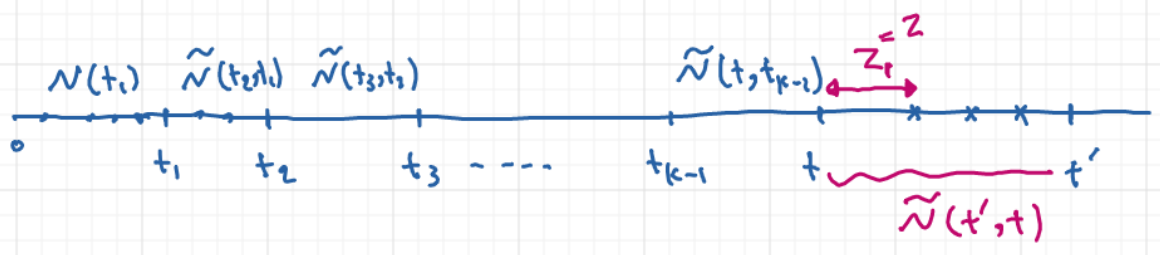


قضیه ای که این جمله بدون اثبات بیان کند $\Leftarrow$ تعریف خاصیت SIP را دارد

* تعریف : Independent Increment property

فراپیدگی‌های $N(t)$ خاصیت فوق‌العاده دارد آنکه برای هر عدد صحیح $k > 0$ و $0 < t_1 < \dots < t_k$ متغیرهای تصادفی $N(t_1)$ و

$\tilde{N}(t_2, t_1), \dots, \tilde{N}(t_k, t_{k-1})$ مستقل باشند.



با استفاده از مقیاس: $Z_1 \perp N(t_1), \tilde{N}(t_2, t_1), \dots, \tilde{N}(t, t_{k-1})$
قبل

با استفاده از مقیاس: $\tilde{N}(t', t) \perp N(t_1), \tilde{N}(t_2, t_1), \dots, \tilde{N}(t, t_{k-1})$
بعد

$$\xrightarrow[t=t_k, t'=t_{k+1}]{} \tilde{N}(t_{k+1}, t_k) \perp N(t_1), \tilde{N}(t_2, t_1), \dots, \tilde{N}(t_k, t_{k-1})$$

$\Rightarrow IIP \checkmark$

* تابع چگالی احتمال S_n و تابع چگالی احتمال مستقل $S_1, \dots, S_n$;
• راه اول برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال S_n :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad , \quad X_i \text{ are independent}$$

به طور خاص: $S_2 = X_1 + X_2$, $X_i \text{ iid} \sim f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

بنابراین: $f_{S_2}(s) = (f_X * f_X)(s)$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) f_X(s-\tau) d\tau$$

$\Rightarrow f_{S_3}(s) = (f_{S_2} * f_X)(s)$
 $\vdots$
$$f_{S_n}(s) = \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} , \quad s \geq 0$$

$$f_{S_2, S_1}(s_2, s_1) = f_{S_1}(s_1) \cdot f_{S_2|S_1}(s_2|s_1)$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$S_1 = X_1 \quad \quad \quad X_2 = s_2 - s_1$$

$$= \lambda e^{-\lambda s_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} = \lambda^2 e^{-\lambda s_2}$$

$$: 0 < s_1 < s_2$$

توزیع پواسن ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda}, x \geq 0$) . $\mu = \lambda$ و $\sigma^2 = \lambda$

سای توابع مستقل $s_1, \dots, s_n$ داریم:

$\forall n: \int_{s_1 \dots s_n} (s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad s_n > s_{n-1} > \dots > s_1 > 0$

اثبات: با استفاده از استقراء یا ادانه دادن استدلال قیلي برای دو متغیر s_1 و s_2

⇐ تر صیف کامل قرائند یواکن از طریق متغیرهای $\{s_n\}$ را داریم.

* تابعی سازی $f_{s_1 \dots s_n}$ به مقصود به دست آوردن f_{s_n} :

$$\begin{aligned} f_{s_n}(s_n) &= \int_0^{s_n} \int_0^{s_{n-1}} \dots \int_0^{s_2} \underbrace{f_{s_1 \dots s_n}(s_1, \dots, s_n)}_{= \lambda^n e^{-\lambda s_n}} ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda s_n} \int_0^{s_n} \dots \underbrace{\int_0^{s_2} ds_1 \dots ds_{n-1}}_{= s_2} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda s_n} \int_0^{s_n} \dots \underbrace{\int_0^{s_3} s_2 ds_2 \dots ds_{n-1}}_{= \frac{1}{2} s_3^2} \end{aligned}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda s_n} \cdot \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!}$$