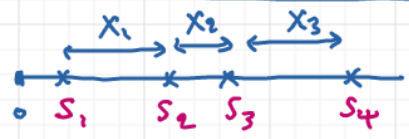


فرایندهای تصادفی: جلسه 13 6 23 فروردین 1400

* مطالب امروز

- تابع چرخی احتمال متغیر تصادفی $N(4)$
- چند نکته درباره توزیع پواسن
- تعاریف دیگری برای فرایند پواسن
- ترکیب کردن و اشتعاب کردن فرایند پواسن
- مکرر بحث فرایند های گاوسی

• مرور : فرایند پواسن



$$X_i: iid \sim \exp(\lambda)$$

$$0 < S_1 < S_2 < S_3 < S_4 \dots$$

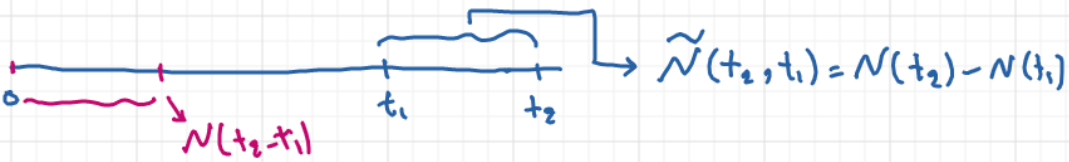
$$f_{S_1 \dots S_n}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$$

چون $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ است

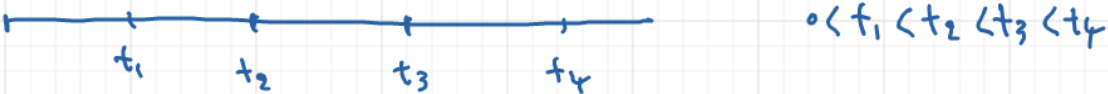
$$f_{S_n}(s) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda s} s^{n-1}}{(n-1)!}$$

Stationary inc. prop.

• دو خاصیت قرائت برآیند:



Independent inc. Prop.



$$\tilde{N}(t_2, t_1) \perp \tilde{N}(t_4, t_3) : \forall 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

* تابع توزیع جری $N(t)$: PMF
 $\forall t: N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

• قضیه: برای یک فرایند پواسن با نرخ λ ، ویای هر $t > 0$ ، تابع جری احتمال متغیر تصادفی $N(t)$ برابر است با:

متوسط تعداد ورود در واحد زمان $\rightarrow \lambda$: $P_{N(t)}(n) \equiv P[N(t)=n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

$\Leftarrow \lambda t$: متوسط تعداد ورودها در یک بازه زمانی به طول t

• اثبات: برای هر $n, t > 0$ ، احتمال $P[t < S_{n+1} < t+\delta]$ را به دو طریق مختلف حساب می‌کنیم.

از یک طرف: $P[t < S_{n+1} < t+\delta] = \int_t^{t+\delta} f_{S_{n+1}}(\tau) d\tau$
 $= \underbrace{f_{S_{n+1}}(t) \delta}_{\text{little o}} + o(\delta)$ ①

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{g(\delta)}{\delta} = 0 \iff g(\delta) = o(\delta) \text{ : تعریف کوچک:}$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[t < S_{n+1} < t+\delta] &= \mathbb{P}[N(t)=n, \tilde{N}(t, t+\delta)=1] \\
 &\stackrel{\substack{\text{Indp. inc. prob.} \\ \downarrow}}{=} P_{N(t)}(n) \cdot \underbrace{\mathbb{P}[N(\delta)=1]}_{\substack{\text{Stat. inc.} \\ \text{Prob.} \downarrow}} + \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}[N(t)=n+1-i, \tilde{N}(t, t+\delta)=i] \\
 &= P_{N(t)}(n) \cdot \mathbb{P}[N(\delta)=1] + \underbrace{\sum_{i=2}^{n+1} P_{N(t)}(n+1-i) \cdot \mathbb{P}[N(\delta)=i]}_{=A} \\
 &= P_{N(t)}(n) \mathbb{P}[X_1 \in (0, \delta), S_2 \in (\delta, \infty)] + A \\
 &= P_{N(t)}(n) \mathbb{P}[X_1 \in (0, \delta)] \mathbb{P}[S_2 \in (\delta, \infty) | X_1 \in (0, \delta)] + A \\
 &= P_{N(t)}(n) \mathbb{P}[X_1 \in (0, \delta)] \mathbb{P}[X_2 \in (\delta - X_1, \infty) | X_1 \in (0, \delta)] + A
 \end{aligned}$$

> از آنجا:

$$\begin{aligned} P[X_1 \in (0, \delta)] &= \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = [-e^{-\lambda \tau}]_0^\delta \\ &= 1 - e^{-\lambda \delta} = 1 - (1 - \lambda \delta + o(\delta)) = \lambda \delta + o(\delta) \end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$\begin{aligned} P[X_2 \in (\delta - X_1, \infty) | X_1 \in (0, \delta)] &= \int_{\delta - X_1}^\infty \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau \\ &= [-e^{-\lambda \tau}]_{\delta - X_1}^\infty = e^{-\lambda(\delta - X_1)} = 1 - \lambda(\delta - X_1) + o(\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P[t < S_{n+1} < t + \delta] &= P_{N(t)}^{(n)} (\lambda \delta + o(\delta)) (1 - \lambda(\delta - X_1) + o(\delta)) + A \\ &= P_{N(t)}^{(n)} \cdot [\lambda \delta + o(\delta)] + A \end{aligned}$$

حال برای محاسبه A:

$$P[N(\delta) = 2] = P[0 < S_2 \leq \delta, S_3 > \delta]$$

$$\vdots \leq \mathbb{P}[0 < S_2 \leq \delta] = \int_0^\delta \lambda^2 e^{-\lambda s} s \, ds = \dots = o(\delta)$$

$$\mathbb{P}[N(\delta) = i] = o(\delta) \quad 2 \leq i \leq n+1$$

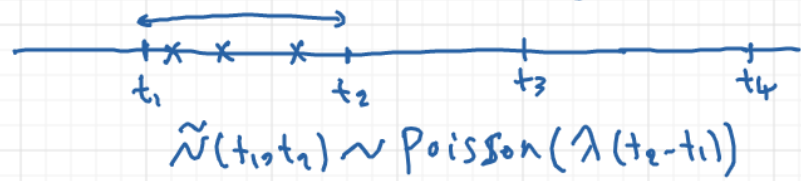
$$\Rightarrow A = o(\delta)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[t < S_{n+1} < t + \delta] = P_{N(t)}(n) \lambda \delta + o(\delta) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow P_{N(t)}(n) \lambda \delta + o(\delta) = f_{S_{n+1}}(t) [\delta + o(\delta)]$$

$$\xRightarrow{\delta \rightarrow 0} P_{N(t)}(n) = \frac{f_{S_{n+1}}(t)}{\lambda} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

در نتیجه: برای یک قرائین پواسن:



یا دارای در مورد توزیع پواسن:

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \rightarrow \quad E[X] = \text{var}[X] = \lambda$$

$$\phi_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

هم در متغیر تصادفی مستقل پواسن با پارامترهای λ_1, λ_2 یک متغیر پواسن با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

توزیع پواسن با پارامتر λ صدیک توزیع دو جمله $\text{Binom}(n, p)$ که $\lambda = np$,

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \end{cases}$$

* تعریف دیگر برای فرایند پواسن :

تعریف 2: یک فرایند شمارش $\{N(t); t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن است اگر که $N(t)$ تابع جبری اقبال پواسن داشته باشد :

$$P_{N(t)}(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

و خاصیت stationary inc. prop. , خاصیت indep. inc. prop. داشته باشد.

تعریف 3: فرایند شمارش $\{N(t); t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن است اگر که

روابط زیر برقرار باشد:

$$P[\tilde{N}(t, t+\delta) = 0] = e^{-\lambda \delta} \simeq 1 - \lambda \delta + o(\delta)$$

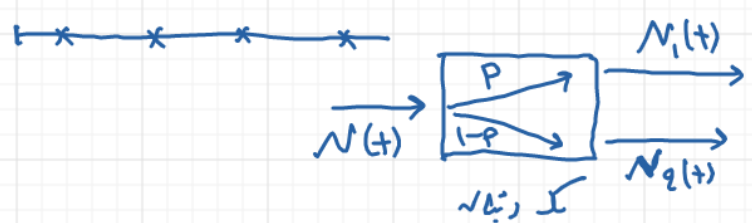
$$P[\tilde{N}(t, t+\delta) = 1] = \lambda \delta e^{-\lambda \delta} \simeq \lambda \delta + o(\delta)$$

$$P[\tilde{N}(t, t+\delta) \geq 2] = o(\delta)$$

در خواص SIP و IIP را یاد کنید.

* مقید: فرض کنید دو فرایند مستقل پواسن $\{N_1(t); t \geq 0\}$ و $\{N_2(t); t \geq 0\}$ با نرخ های λ_1 و λ_2 داریم.
اگر $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ $\Leftrightarrow \{N(t); t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن با نرخ $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

* مقید: اشتقاق کردن یک فرایند پواسن $\{N(t); t \geq 0\}$



شماره ای و مستقل از فرایند $\{N(t)\}$

$\Leftrightarrow \{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ دو فرایند پواسن مستقل هستند با نرخ های

• $\lambda_2 = \lambda(1-p)$, $\lambda_1 = \lambda p$