

فرایندهای تصادفی : جلسه ۱۴ ۶ ۲۸ خرداد ۱۴۰۰

* مطالب امروز

- مقییم های تصادفی گاوسی
- بردارهای تصادفی گاوسی
- فرایندهای گاوسی
- چند مثال از فرایندهای گاوسی گسسته - زمان
- مقییم ای در مورد استاتی فرایندهای گاوسی

* مقییم تصادفی گاوسی :

یک مقییم یا توزیع بیگانه که تابع چگالی احتمال زیر را دارد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ و } X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

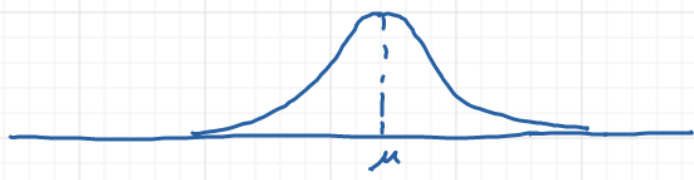
$$A \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_X(y) dx dy$$

تقسیم مساحت
به دو قسمت
قطبی



همچنین : $E[X] = \mu, \text{Var}[X] = \sigma^2$



$$P[|X - \mu| > \sigma] \simeq 0.318$$

$$P[|X-\mu| > 3\sigma] \approx 0.0027$$

$$P[|X-\mu| > 5\sigma] \approx 2.2 \times 10^{-12}$$

تایج مولد گشتار یک متغیر مقادیری با توزیع گاوسی: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\phi_X(r) = \mathbb{E}[e^{rX}] = e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}}$$

متغیر (متغیر یکسانی) تایج مولد گشتار در:

فرض کنید X و Y دو متغیر مقادیری با توزیع مولد گشتار $\phi_X(r)$ و $\phi_Y(r)$ باشند.
اگر یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که $\phi_X(r) = \phi_Y(r)$ برای $r \in (-\delta, \delta)$

X و Y توزیع یکسانی دارند.

تعریف: فرض کنید یک بردار مقادیری $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ متشکل از n متغیر مقادیری

یا کد. ماتریس کواریانسی $\underline{\underline{C}}$ برای بردار تصادفی $\underline{X}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_{ij} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = C_{ji}$$

$$\underline{\underline{C}} = E[\underbrace{(\underline{X} - E[\underline{X}])(\underline{X} - E[\underline{X}])^T}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$= E \left[\begin{bmatrix} X_1 - E[X_1] \\ \vdots \\ X_n - E[X_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_1 - E[X_1]) & \dots & (X_n - E[X_n]) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} E[(X_1 - E[X_1])^2] & \dots & E[(X_1 - E[X_1])(X_n - E[X_n])] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - E[X_n])(X_1 - E[X_1])] & \dots & E[(X_n - E[X_n])^2] \end{bmatrix}$$

• تابع مولد گشتاور برای بردار تصادفی:

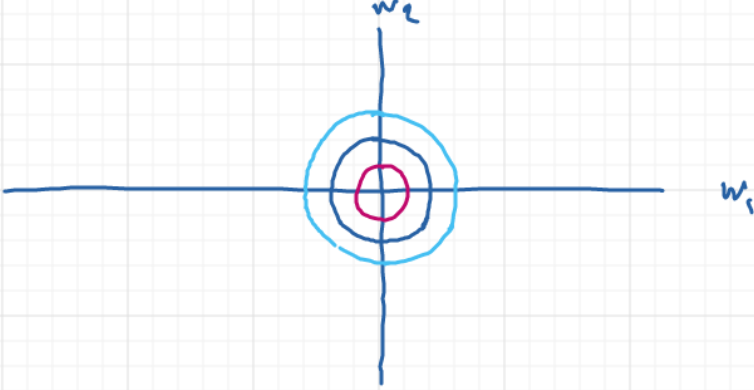
یک تابع n متغیره: $\phi_X(\underline{r}) \equiv \mathbb{E}[e^{\underline{r}^T \underline{X}}] = \mathbb{E}[e^{r_1 x_1 + \dots + r_n x_n}]$
در حالت کلی یک یا زه چند جبری حول نقطه صفر وجود دارند با آنکه ϕ_X تعریف شده باشد.
ممکن است

• برای به درستی گاوسی که در ادامه تعریف می‌کنند، $\phi_X(\underline{r})$ به ازای $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده است.

* به درستی تصادفی گاوسی iid با توزیع استاندارد:
یک بردار $\underline{w}$ از متغیرهای تصادفی iid w_j را به صورت $w_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$
ما به درستی تصادفی گاوسی iid با توزیع استاندارد داریم.
به علت مستقل بودن $w_1, w_2, \dots, w_n$ تابع چگالی احتمال مشترک $\underline{w}$ برابر است با:

$$f_{\underline{w}}(\underline{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{\underline{w}^T \underline{w}}{2}\right)$$



↔ $\underline{w}$ independent

$$\phi_{\underline{w}}(\underline{r}) = \mathbb{E}\left[e^{\underline{r}^T \underline{w}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^n r_i w_i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{r_i w_i}\right]$$

↪ w_i independent

$$= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{r_i w_i}\right] = \prod_{i=1}^n e^{\frac{r_i^2}{2}} = \exp\left[\frac{\underline{r}^T \underline{r}}{2}\right]$$

* بردارهای تصادفی مشترک گاوسی (Jointly-Gaussian random vec.) :

$\{Z_1, \dots, Z_n\}$ یک مجموعه از متغیرهای مشترک گاوسی با امید ریاضی صفر است و

$Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ یک بردار گاوسی با امید ریاضی صفر، اگر که برای یک مجموعه

متغیرهای تصادفی مستقل $w_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ، $m \leq n$ ،

هر متغیر Z را بتوانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= a_{11} w_1 + \dots + a_{1m} w_m \\ &\vdots \\ Z_n &= a_{n1} w_1 + \dots + a_{nm} w_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{w}}$$

$\downarrow \quad n \times m$
 $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Z] = 0$

به صورت کلی تر ، $\underline{\underline{u}} = (u_1, \dots, u_n)^T$ یک بردار گاوسی است، اگر که

$$\underline{u} = \underline{z} + \underline{\mu}$$

یک بردار ثابت $\in \mathbb{R}^n$:
یک بردار گوسی با ایز ریاضی منفرجه

$$= \underline{A} \underline{w} + \underline{\mu}$$

• چون $\underline{w}$ ها گوسی و مستقل هستند $\Leftrightarrow \underline{z}_i$ ها توزیع گوسی دارند.
و $\underline{\mu}_i$ ها

* مقید: فرض کنیم $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ یک بردار گوسی با ایز ریاضی منفرجه باشد. اگر

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \text{ یک بردار مقایسه‌ای باشد که به صورت } \underline{y} = \underline{B} \underline{z}$$

تقریب شده است. به سبب $\underline{y}$ یک بردار گوسی است.

$$\underline{y} = \underline{B} \underline{z} = \underline{B} \underline{A} \underline{w} = \underline{A'} \underline{w}$$

$\underline{B} \underline{A} = \underline{A'}$

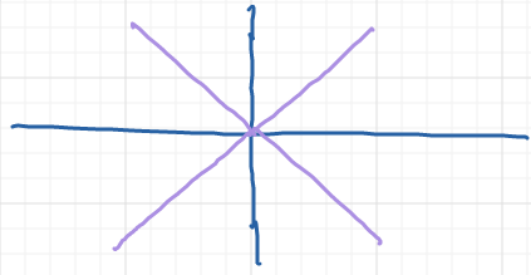
• در نتیجه: اگر $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ یک بردار گوسی با ایز ریاضی منفرجه باشد

هر بردار حقیقی $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ، ترکیب فضی $\underline{a}^T \underline{z}$ یک متغیر تصادفی گاوسی یا آمیز ریاضی می‌باشد.

مثال: فرض کنید $Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ و $X \in \{\pm 1\}$ مستقل از هر باشند، و $P[X=\pm 1] = \frac{1}{2}$.

$Z_2 \triangleq X Z_1$ $Z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$. سوال: آیا Z_1 و Z_2 مشترک گاوسی هستند؟

اگر چگالی احتمال مشترک Z_1, Z_2 را نگاه کنیم: $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)$



پاسخ به سئوای قبلی: برای $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، اگر $\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ یک بردار گاوسی باشند، باید

$$\underline{a}^T \underline{z} = Z_1 + Z_2$$

یک متغیر تصادفی است که در $\frac{1}{2}$ مواقع مقدار منفی دارد.
 $\Leftarrow \{z_1, z_2\}$ مشکل گاری نیست.