

قرایندهای تصادفی: جلسه 15 6 3 فروردین 1400

* مطالب امروز

- تابع مولد گشتاور یک بردار گاوسی
- تابع چگالی احتمال یک بردار گاوسی
- قرایندهای گاوسی
- چند مثال از قرایندهای گاوسی گسترده - زمان
- مقیاسی در مورد استیماي قرایندهای گاوسی (WSS ← SSS)
- تعریف زنجیره مارکوف
- نمایش‌های مختلف زنجیره مارکوف

* یادآوری: بردار $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ گاوسی با ابعاد ریاضی صفر

لذا گاوسی ابعاد n

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{11} w_1 + \dots + a_{1n} w_n \\ &\vdots \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \underline{A} \underline{W} \end{aligned}$$

$$Z_n = a_{n1} w_1 + \dots + a_{nm} w_m$$

بردار گاوسی

در حالت کلی: $\underline{u} = \underline{z} + \underline{\mu} \rightarrow$ بردار ثابت

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\underline{u}] = \underline{\mu}$$

* قضیه: تابع مولدگشتاور یک بردار گاوسی با این ریاضی صفر

$$\phi_{\underline{z}}(\underline{r}) = \mathbb{E}\left[e^{\underline{r}^T \underline{z}}\right] = \exp\left[\frac{\underline{r}^T \underline{C} \underline{r}}{2}\right]$$

تعریف کنیم: $X = \underline{r}^T \underline{z}$ • توزیع گاوسی دارد با این ریاضی 0.

$\underline{z}$ توزیع گاوسی دارد.

$$\Rightarrow \phi_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] = \exp\left[\frac{s^2 \sigma_X^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \phi_{\underline{z}}(\underline{r}) = \mathbb{E}\left[e^{\underline{r}^T \underline{z}}\right] = \mathbb{E}[e^X] = \phi_X(1) = e^{\frac{\sigma_X^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[(\underline{r}^T \underline{z})^2] = \mathbb{E}[(\underline{r}^T \underline{z})(\underline{r}^T \underline{z})^T] \\ &= \mathbb{E}[\underline{r}^T \underline{z} \underline{z}^T \underline{r}] = \underline{r}^T \underbrace{\mathbb{E}[\underline{z} \underline{z}^T]}_{\underline{\Sigma}_z} \underline{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_{\underline{z}}(\underline{r}) = \exp\left[\frac{1}{2} \underline{r}^T \underline{\Sigma}_z \underline{r}\right]$$

به طور مشابه برای بردار گاوسی $\underline{\mu}$:

$\phi_{\underline{\mu}}(\underline{r}) = \exp\left[\underline{r}^T \underline{\mu} + \frac{1}{2} \underline{r}^T \underline{\Sigma}_{\underline{\mu}} \underline{r}\right]$: برای همه $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده است.

$\left. \begin{array}{l} \text{پارامترهای لازم برای داشتن تابع چگالی استاندارد یک} \\ \text{بردار گاوسی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یک بردار گاوسی به طور کامل توسط بردار امید ریاضی } \underline{\mu}$

و ماتریس کواریانس Σ مشخص می‌کند.

* تابع چگالی احتمال یک بردار گاوسی:

یعنی بردار گاوسی $\underline{u}$ با ابعاد ریاضی $\underline{\mu}$ و ماتریس کواریانس Σ پذیرد:

$$f_{\underline{u}}(\underline{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1}(\underline{u} - \underline{\mu})\right]$$

$$\underline{u} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$$

* قرائیندهای گاوسی:

$\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ یک قرائینده تصادفی گاوسی است اگر که به ازای هر عدد صحیح مثبت

k و هر زمان $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$ مجموعه متغیرهای $X(t_1), \dots, X(t_k)$ مشترک گاوسی باشند.

* معنی: برای یک فرایند گاوسی $\{X(t); t \in \mathcal{T}\}$ ، تابع autocovariance $C_X(t, t')$ و امید ریاضی $\mu_X(t)$ (برای هر t و t') تابع چگالی احتمال مشترک بردارهای $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ را برای هر k و $t_1, \dots, t_k$ مشخص می‌کنند.
↪ پس فرایند ما را به طور کامل توصیف می‌کند.

* مثال: فرایند گاوسی ایزوگست-زمان:
فرایند $\{W(n); n \in \mathbb{Z}\}$ که $W(-1), W(0), W(1), \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای متغرنی ایزو پراکنش گاوسی $N(0, \sigma^2)$.

$$\begin{cases} \mu_X(t) = 0 \\ C_W(k, l) = \delta_{k, l} \sigma^2 \end{cases}$$

↪ امید ریاضی :

↪ autocov. :



X یک فرایند WSS است.

از سیمپ

ولی می دانیم که X فرایند SSS هم است.

* مثال: فرایند جمع گاوین زمان-گسسته:

فرایند $\{S(n), n \in \mathbb{N}\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S(n) = W(1) + \dots + W(n)$$

می توانیم به سادگی مشاهده کنیم به دار $(S(1), \dots, S(n))$ یک تبدیل خطی از روی

به دار $(W(1), \dots, W(n))$ ساخته می شود $\Leftrightarrow (S(1), \dots, S(n))$ برای هر n همبسته گاوسی

است. $\Leftrightarrow \{S(n)\}$ یک فرایند گاوسی است.

$$\mu_S(n) = 0$$

$$C_S(k, l) = \mathbb{E}[S(k)S(l)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k W(i)\right)\left(\sum_{j=1}^l W(j)\right)\right]$$

$$= \min[k, l] \cdot \sigma^2$$

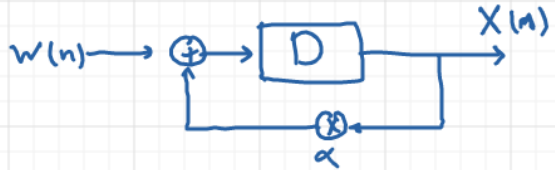
$\{S(n)\} \Leftarrow \text{WSS}$ نیست.

$$\text{Var}[S(n)] = n \cdot \sigma^2$$

مثال: غرایب گوسی-مارکوف زمان-گسسته:

فرض کنید α یک عدد حقیقی و $|\alpha| < 1$ و قزاینه تصادفی $\{X(n); n \in \mathcal{N}\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(n+1) = \alpha X(n) + W(n), \quad n \in \mathcal{N}, \quad X(0) = 0$$



• آیا قزاینه فوق گوسی است؟

$$X(n) = W(n-1) + \alpha W(n-2) + \dots + \alpha^{n-1} W(0)$$

$\Leftarrow$ به دار $(X(1), \dots, X(n))$ را و همان یاکه تبدیل خطی از به دار $(W(0), \dots, W(n-1))$

بسیار ساده و سریع . $\Leftarrow$ یک مثال دیگر

$$\begin{cases} \mu_X(n) = 0 \\ C_X(n+k, n) = \mathbb{E}[X(n+k)X(n)] = \frac{\sigma^2 (1-\alpha^{2n}) \alpha^k}{1-\alpha^2}, \quad k \gg 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_X(n+k, n) = \frac{\sigma^2 \alpha^k}{1-\alpha^2}, \quad k \gg 0 \quad \Downarrow \text{wss } \{X(n)\}$$

ولی می توانیم آن را به صورت دیگری بنویسیم :

$$Y(n) = w(n-1) + \alpha w(n-2) + \dots + \alpha^{n-1} w(0) + \alpha^n w(-1) + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} w(n-i)$$

$$\Rightarrow C_Y(n+k, n) = \frac{\sigma^2 \alpha^k}{1-\alpha^2}, \quad k \gg 0 \Rightarrow \text{wss } \{Y(n)\}.$$

* مقصود: یک فرایند گاوسی $\{X(t); t \in \mathcal{T}\}$ را در نظر بگیرید که $\mathcal{T}$ برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}^+$ یا $\mathbb{Z}^+$ و موارد مشابه است که بتوانیم شیفت زمانی را راحت تعریف کنیم.
این فرایند SSS است اگر و فقط اگر:

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(s)] \quad , \quad \forall t, s \in \mathcal{T}$$

$$\textcircled{2} \quad C_X(t+\Delta, t) = C_X(\Delta, 0) = C_X(\Delta) \quad \forall t, \Delta \in \mathcal{T}$$

اثبات: اگر فرض کنیم به وضوح $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ برقرار هستند. ✓

برای یقینی دوم یعنی اگر $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ برقرار باشند $\leftarrow$ SSS است

با به نشان دهیم که توزیع مشترک متغیرهای $X(t_1), \dots, X(t_k)$ برابر
توزیع مشترک $X(t_1+\Delta), \dots, X(t_k+\Delta)$ است.

که هر دو دارای توزیع گاوسی هستند و توسط Δ دار میانی و ماتریس کوارانسی که لا متغی

ی کونند. برادر میانی هر دو یکسان است. همچنین تاثیر کوارانسی ها:

$$C_{ij}^x = C_x(t_i, t_j) = C_x(t_i + \Delta, t_j + \Delta) = C_{ij}^{x+\Delta}$$

$\Rightarrow \checkmark$