

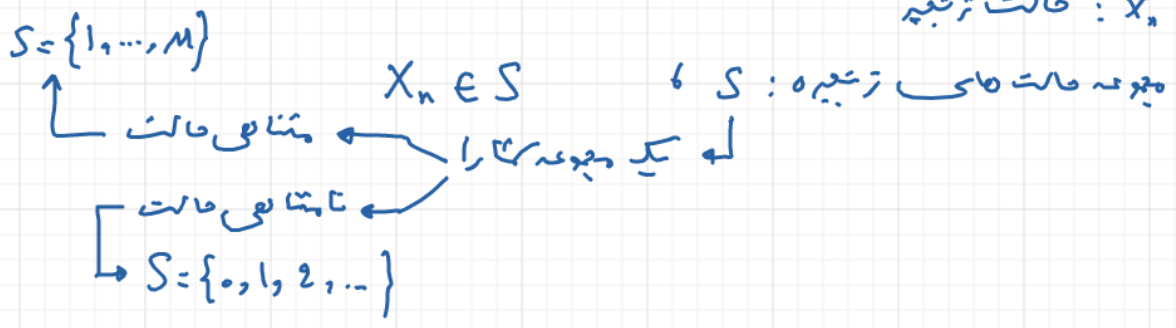
فرایندهای تصادفی : جلسه 16 ، 4 اردیبهشت 1400

- \* مطالب امروز:
- تعریف زنجیره مارکف
- نمایشی های مختلف زنجیره مارکف
- دسته بندی حالت های یک زنجیره مارکف

\* زنجیره مارکف ( Markov chain ) :

فرایند تصادفی گسسته-زمان  $\{X_n; n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$

$X_n$  : حالت زنجیره



\* ستریت زنجیره مارکف :

یک خانواده زمان-گسسته  $\{X_n; n \geq 1\}$  و  $X_n \in S$  و  $X_n$  از نظر احتمالاتی  
منفصل از طریق  $X_{n-1}$  به گزشتنه زنجیره وابستگی دارد.  
به طرز دقیق تر:

$$P[X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = k, \dots, X_0 = l] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$$

برای همه  $l \in S, k, \dots, j, i$  و برای هر  $n \geq 1$  و برای همه نتایج  
 $\{X_{n-1} = i, X_{n-2} = k, \dots, X_0 = l\}$  با احتمال غیر صفر.

اگر این احتمال ها  
 $P_{ij}^{(n)} \triangleq P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] :$   
به زمان هر وابسته باشند

زنجیره مارکف غیر همگن (non-homogeneous)  
می آید اگر وابستگی زمانی داشته باشد :

(زنجیره همگن)

$$P_{ij} \triangleq P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$$

• در ادامه: زنجیره های مارکوف متناهی حالت گفتن

• اگر توزیع احتمال  $X_0$  را داشته باشیم، همه احتمال گذارها  $P_{ij}$  ها  $\leftarrow$  احتمال هر وقایع این زنجیره قابل محاسبه است.

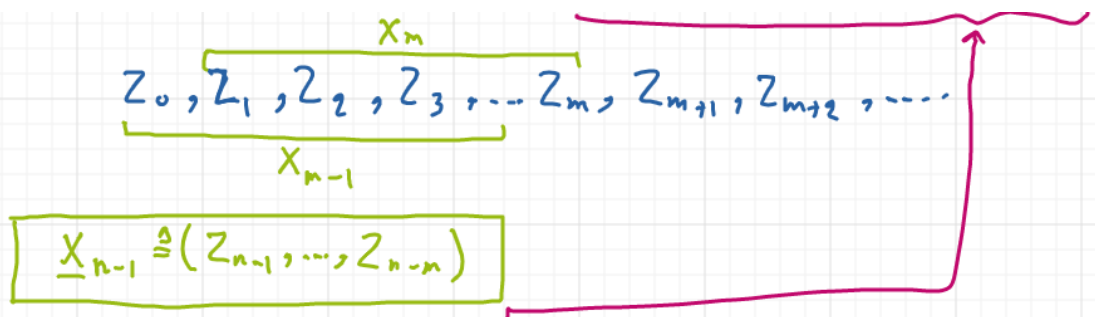
\* مثال: فرایند تران-صنایع  $\{X_n; n \geq 0\}$  داریم که  $Z_n \in S$  دلی راجعه زیر را داریم:

$$P[Z_n | Z_{n-1}, \dots, Z_0] = P[Z_n | Z_{n-1}, \dots, Z_{n-m}]$$

می قواصع از روی این یک زنجیره مارکوف (مرتبه 1) می سازیم.

راجعه بالا را به شکل زیر می توانیم بنویسیم:

$$P[Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-m+1} | Z_{n-1}, \dots, Z_0] = P[Z_n, \dots, Z_{n-m+1} | Z_{n-1}, \dots, Z_{n-m}]$$



$$\Rightarrow P[X_n | X_{n-1}, \dots, X_{m-1}] = P[X_n | X_{n-1}]$$

\* نمایشی‌هایی مختلف برای یک زنجیره مارکوف :

• نمایش بر اساس یک گراف جهت دار :

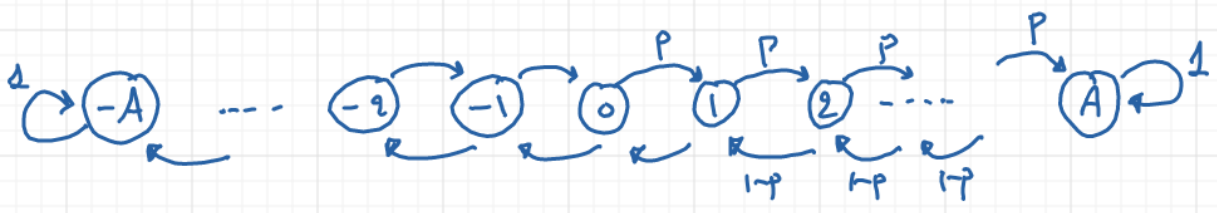
حالت ها  $\rightarrow$  گره های گراف

اگرچه از به گره  $n$  یک یا ل جهت دار است  $\Leftrightarrow P_{ij} > 0$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{61} & \dots & P_{66} \end{bmatrix}_{m \times m} \quad m = |S|$$

• مثال: یک بارزی: هر دفعه یک <sup>مستقل</sup> که برتابی کنید. ← یک: ۱ + استار  
 -۱ استار: قطه

امکان از اول به آخر است. اگر از آخر به اول  $A$  به سمت 0  
از  $-A$  به سمت 0



$$\mathbb{P}[X_{n+1}=s \mid X_n=S_n, X_{n-1}=S_{n-1}, \dots, X_0=0] \rightarrow \begin{cases} P & : S=S_n+1 \\ 1-P & : S=S_n-1 \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$
$$= \mathbb{P}[X_{n+1}=S \mid X_n=S_n]$$

مثال (Random walk): حرکت تصادفی:  $S = \mathbb{Z}$  و برای  $0 < P < 1$

$$\begin{cases} P_{i,i+1} = P \\ P_{i,i-1} = 1-P \end{cases}, i \in S$$

---

\* دسته‌بندی حالت‌های یک زنجیره مارکوف :  
• تعریف :

• قدم به طول  $n$  به روی یک گراف : دنباله مرتبی از گره‌هاست  
 $i_1, i_2, \dots, i_n$

که در گراف یک پل جهت دار از  $i_m$  به  $i_{m+1}$  داریم برای  $0 \leq m < n$ .

- مسیر ( path ) : یک قدم به روی گراف که هیچ گرهی دو بار تکرار نشود
- دور ( cycle ) : یک قدم به روی گراف که گره شروع و پایان یکسان باشد و بقیه گره‌ها هم تکراری نباشند.

در یک گراف با  $M$  گره : حداکثر طول مسیر =  $M-1$   
حداکثر طول دور =  $M$   
حداکثر طول قدم = نامتناهی

• تعریف : می‌گوییم حالت  $n$  از حالت  $z$  قابل دسترسی است ( می‌رسیم )  $z \rightarrow n$

اگر یک قدم به روی گراف زنجیره مارکوف از  $i$  به  $j$  وجود داشته باشد.

معنی قابل دسترسی بودن؛

اگر یک قدم  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$  از گره  $i_0$  به  $i_n$  داشته باشیم

اگر در ابتدا در حالت  $X_0 = i_0$  باشیم  $\leftarrow$  با یک انتقال غیر صفر به حالت  $X_1 = i_1$   
 $\leftarrow$  با انتقال غیر صفر به حالت  $X_2 = i_2 \leftarrow \dots \leftarrow$  با انتقال غیر صفر به  $X_n = i_n$

از طرف دیگر اگر  $P[X_n = i_n | X_0 = i_0] > 0$   $\leftarrow$  یک قدم به طول  $n$  به روی گراف زنجیره وجود دارد.

به طور خلاصه:  $i \rightarrow j \iff \exists n \geq 1 \quad P[X_n = j | X_0 = i] > 0$

• تعریف:  $P_{ij}^n \triangleq P[X_n = j | X_0 = i]$

نتیجه: اگر از  $i$  به  $j$  یک قدم به طول  $n$  درگند باشیم و  
از  $j$  به  $k$   $m$  -----  
 $\Leftrightarrow$  از  $i$  به  $k$  یک قدم به طول  $n+m$  داریم.

$$\Rightarrow P_{ij}^n > 0, P_{jk}^m > 0 \Rightarrow P_{ik}^{m+n} > 0$$

$$\Rightarrow i \rightarrow j, j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$$

تعریف: یگویییم دو حالت  $A$  و  $B$  در ارتباط هستند (Communicate) اگر که:  
 $i \rightarrow j$  و  $j \rightarrow i$  در این صورت می‌نویسیم:

$$i \leftrightarrow j$$

نتیجه: اگر  $i \leftrightarrow j$  و  $j \leftrightarrow k \Leftrightarrow i \leftrightarrow k$

تعریف کلاسی: یک کلاسی  $C$  از حالت‌ها یک مجموعه غیر تهی از حالت‌ها است که  
همای هر  $i \in C$  و هر  $j \neq i$  درگند باشیم:

$$\begin{aligned} i \in C \text{ اگر که } & i \longleftrightarrow j \\ i \notin C \text{ اگر که } & i \not\longleftrightarrow j \end{aligned}$$

کلاسی های مثال که امتحان: {1, 2, 3} و {4} و {5} و {6}   
 همه حالت های یک زنجیره مارکیت اخرازی شوند به کلاس های

• تعریف: برای یک زنجیره مارکیت با تعداد متناهی حالت ها یک حالت یا زنجیش (reCurrent)   
 یک حالت  $i \in C$  است که قابل دسترسی از همه حالت های باشد که از   
 قابل دسترسی هستند.

$$\{ i \rightarrow j \Rightarrow j \rightarrow i \} \Rightarrow \text{یک حالت یا زنجیش است}$$

اگر برای همه  $j$  های که:

اگر یک حالتی یا زنجیش نبود گذرا (transient) است.

• مقنیه: در یک زنجیره مارکف متناهی حالت همه حالت های یک کلاک یا بازگشتی اند یا گذرا.

اثبات: فرض  $i$  گذرا باشد  $\leftarrow$  و  $j \rightarrow i : \exists j$   
 $i \leftrightarrow j$

فرض  $i$  و  $m$  در یک کلاک باشند و  $m$  گذرا باشد.  $\Leftarrow$

$$m \leftrightarrow i \rightarrow j \rightarrow m \Rightarrow i \rightarrow j \rightarrow i \Rightarrow i \leftrightarrow j$$

تناقض  
❌

$m$  گذرا نیست  $\Leftarrow$   $m$  گذرا باشد.

---