

فرایندهای تصادفی : ۶ اردیبهشت ۱۴۰۰ ۶ جلسه ۱۷

- * دسته بندی حالت های یک زنجیره مارکوف
- * نمایش ماتریسی
- * حالت پایدار یک زنجیره مارکوف

* مرور :

حالت i با j در ارتباط است اگر که : $i \leftrightarrow j$

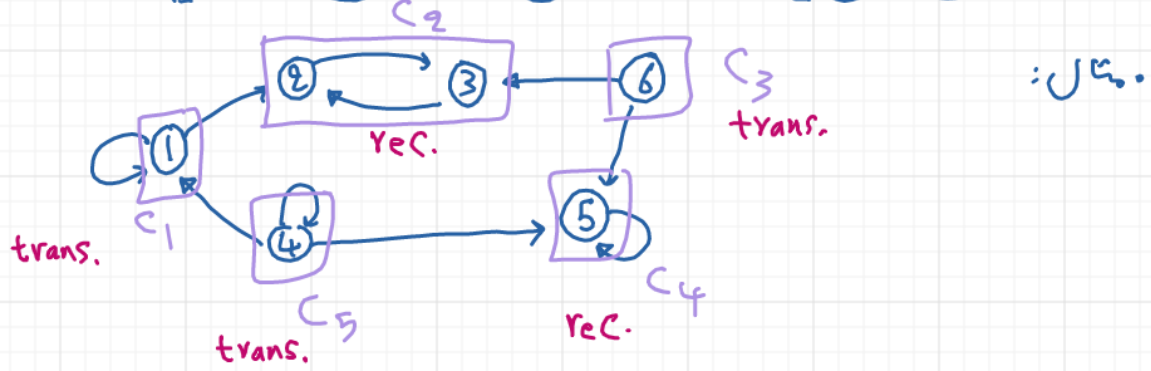
حالت بازگشتی؟ اگر که $j \rightarrow i$ نتیجه بگیریم که $i \rightarrow j$ (recurrent)
اگر حالتی بازگشتی نباشد گذر (transient)

مفهوم کلاسی از حالتها: مجموعه فیلترتی از حالت ها که

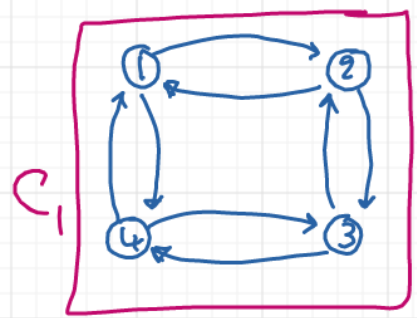
اگر $i \in C \Leftarrow j \in C$ اگر که $i \leftrightarrow j$
 $\Leftarrow j \notin C \dots i \leftrightarrow j$

$\Leftarrow$ مجموعه حالت های
زنجیره مارکوف به کلاسی های
افزازی میگویند.

• گذارهای بازگشتی به بن یک حالت را می توان به کل گلاس آن تعمیم داد.



• دوره تناوب یک حالت :

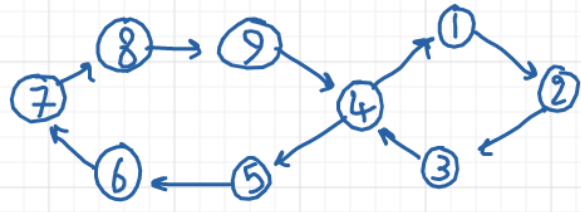


• مثال: $X_0 = 2 \Leftrightarrow$ در زمان زوج در حالت های زوج

$X_0 = 1 \Leftrightarrow$ در زمان های زوج در حالت های فرد

$\Leftrightarrow$ اثر حالت اولیه یا زمان از بین نمی رود.

مثال:



اگر حالت اولیه یا تران از پس می رود.

تعریف: دوره تناوب حالت i را با $d(i)$ نشان می دهیم که برابر است با

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (gcd) اعداد n که $P_{ii}^n > 0$

اگر $d(i) = 1$ حالت i غیر پریودیک است (aperiodic)

اگر $d(i) > 1$ حالت i پریودیک است با دوره تناوب $d(i)$

برای مثال اول: حالت 1 را در نظر بگیرید: $P_{11}^n > 0$

$$n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\} \xRightarrow{\text{gcd}} d(i) = 2$$

برای مثال دوم: مثلاً حالت 1 را در نظر بگیرید: $P_{11}^n > 0$

$$n \in \{4, 8, 10, 12, \dots\} \xRightarrow{\gcd} d(i) = 2$$

مقتضی: برای هر زنجیره مارکوف و حالتی یک کلاک دوره متناوب یکسان دارند.



اثبات:

فرض کنیم $i \leftrightarrow j \Leftarrow i, j \in \mathbb{Z}$
باتوجه به شکل:

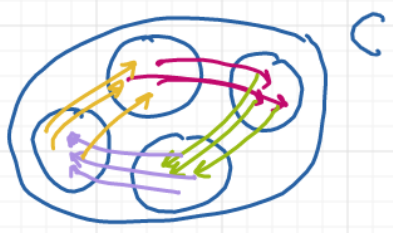
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} d(i) \mid m+n \\ d(i) \mid m+n+t \end{aligned} \right. &\Leftrightarrow P_{ij}^{m+n} > 0 \\ &\Leftrightarrow P_{ij}^{m+n+t} > 0 \\ &\Rightarrow d(i) \mid t : \forall t \quad P_{ij}^t > 0 \end{aligned}$$
$$d(i) \mid \underbrace{\gcd(t_1, t_2, \dots)}_{=d(j)} \quad (1)$$

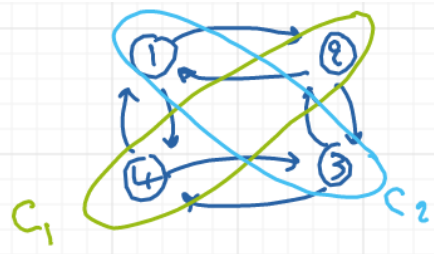
به طور مشابه: $d(j) \mid d(i)$.

$(1), (2) \Rightarrow d(i) = d(j)$

$\Leftrightarrow$ دوره تناوب رای توانیم به کلاس نسبت دهیم.

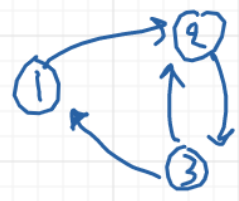
* مقنیه: اگر یک کلاسی α در یک زنجیره مارکف متناهی حالت دوره تناوب d داشته باشد،
و متون حالت های α را به d حالت متمایز $C_{d-1}, \dots, C_1$ اقتراز کرد
به طوریکه گذارها از $C_l \rightarrow C_{l+1}$ به ای $0 \leq l < d-1$
و از $C_{d-1} \rightarrow C_0$ به ای $l=d-1$.





مثال:

- تعریف (کلاک ورنیه ergodic):
برای یک زنجیره مارکوف متناهی حالت، یک کلاک ergodic است اگر که بازگشتی باشد و غیر تناوبی.
- اگر زنجیره مقصد از همین کلاک تشکیل شده باشد $\Rightarrow$ زنجیره ergodic
- (معنای بینیم انحصار اولیه زنجیره ergodic یا گذشت زمان محدودی ندارد).
- مقصد: برای یک زنجیره مارکوف ergodic با M حالت داریم:

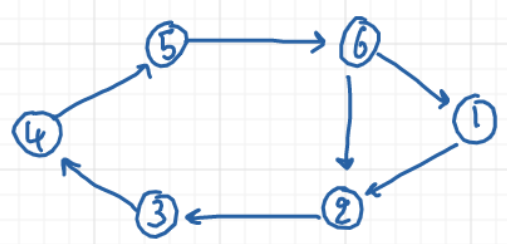


$$P_{ij}^m > 0$$

برای هر $m \geq (M-1)^2 + 1$ و هر i, j

$$M=3 \Rightarrow (M-1)^2 + 1 = 5$$

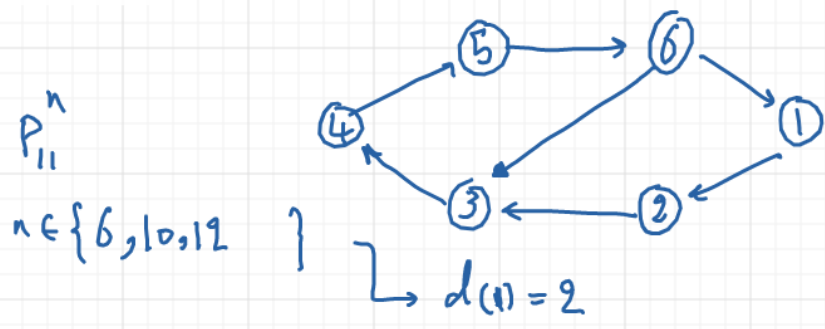
(نهایت 4.5 کتاب)



مثال: $M=6$

$$P_{11}^{(M-1)^2} = 0$$

مشکله: یک زنجیره مارکوف $ergodic$ تنها یک دور با طول کمتر از M دارد.



* نمایشی مرتبه های مارکوف:

ماتریس $\underline{\underline{P}}$ نمایشی دهنده احتمال های گذار مرتبه n :

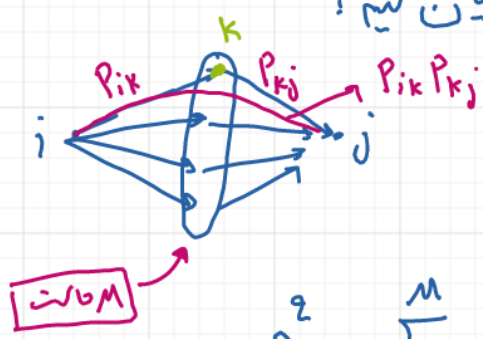
$$P_{ij} = P[X_n = j | X_{n-1} = i]$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\underline{\underline{P}}$ یک ماتریس Stochastic است (به طریقی آن یک $\mathbb{R}^{n \times n}$ است):

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

اول P_{ij}^n را چگونه بر حسب ماتریس $\underline{P}$ بیان کنیم:



• اینها برای $n=2$: $P_{ij}^2 = ?$

$$P_{ij}^2 = \sum_{k=1}^M P_{ik} P_{kj} = [\underline{P}^2]_{ij}$$

• به طور مشابه برای P_{ij}^n :

$$P_{ij}^n = [\underline{P}^n]_{ij}$$

• نتیجه: Chapman-Kolmogorov:

$$\underline{P}^{m+n} = \underline{P}^m \cdot \underline{P}^n$$

از آنجا که $\sqrt{\quad}$:

$$\Rightarrow P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=1}^M P_{ik}^m \cdot P_{kj}^n$$

• حالت پایدار زنجیره مارکوف و $\underline{P}^n$ های ده های بزرگ :

$$P_{ij}^n = P[X_n = j | X_0 = i] \iff X_0 = i$$

تقریب کنیم : تقریب کنیم اثر حالت شروع با اخترا بیسی n از بین می رود.

$$P_{ij}^n \iff \text{های ده های به اندازه کافی بزرگ به از بسگی ندارد به } n \text{ بسگی تراشیده باشد.}$$

$$\underline{P}^n \iff \text{های ده های بزرگ به بسگی به با تریسی با اعداد یکسان درم کتون.}$$

$$\forall i : P_{ij}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_j$$

$$\underline{P}^n \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_{k=1}^M \underbrace{P_{ik}^n}_{\lambda_k} P_{kj}$$

معادله زیر را در نظر بگیرید؛
(با فرض همبستگی)

$$\Rightarrow \lambda_j = \sum_{k=1}^M \lambda_k P_{kj} \Rightarrow \underline{\lambda} = \underline{\lambda} \underline{P}, \quad \underline{\lambda} \geq 0$$

$$\underline{\lambda} \underline{1} = 1$$

↑

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$