

فرایند های تصادفی : جلسه ۱۸ / ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

- تاییلی ماتریسی یک زنجیره مارکف
- حالت پایدار یک زنجیره مارکف
- حالت پایدار با فرقی $\ll P$

• در جلسه قبل نشان داریم که :

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \underline{P}$ و $\lambda_i = 1$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & - \\ \vdots & \\ -\lambda & - \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda} = \underline{\lambda} \underline{P}$

• تعریف : بردار حالت پایدار یا توزیع حالت پایدار یک زنجیره مارکف متناهی حالت یک بردار یا توزیع حالت پایدار یک زنجیره مارکف با M حالت و ماتریس گذار $\underline{P}$ یک بردار احتمالاتی $\underline{\lambda}$ است که در رابطه زیر صادق باشد

$$\underline{1} = \underline{1} \underline{P}$$

نتیجه: اگر با توزیع حالت پایدار شروع کنید، توزیع حالت ها در هر زمان با تقیه منی کند.

$$P_{x_0}(i) = 1_i$$

$$P_{x_1}(j) = \sum_i P_{x_0}(i) P_{ij} = \sum_i 1_i P_{ij} = 1_j$$

تا اینجا متن داده ایم:

$$\sum 1_i = 1, \quad \underline{1} = \underline{1} \underline{P} \quad \Leftarrow \quad \underline{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -1 & - \\ \vdots & - \\ -1 & - \end{bmatrix} \quad \text{اگر}$$

$$\underline{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -1 & - \\ \vdots & - \\ -1 & - \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \text{اگر } \underline{1} = \underline{1} \underline{P}, \quad \sum 1_i = 1$$

با بیان چند سوال زیر پاسخ دهیم:

① تحت چه شرایطی $\underline{P} = \underline{1}P$ یک جواب بردار احتمالی دارد؟

② تحت چه شرایطی $\underline{P} = \underline{1}P$ یک جواب بردار احتمالی یکتا دارد؟

③ تحت چه شرایطی $\underline{P}^n$ به بردار احتمالی $\underline{1}$ که در $\underline{P}$ صدق می کند میل می کند.

جواب سوال یک: همیشه $\underline{P} = \underline{1}P$ حداقل یک جواب بردار احتمالی دارد؟

سای جواب های جبری ← ستون

تعریف (unichain) :

یک unichain یک زنجیره مرتب متناهی حالت است که شامل یک حلقه بازگشتی و تعدادی حالت گذار باشد.

یک ergodic unichain یک unichain است که کلاک بازگشتی آن یک ergodic باشد.

پاسخ سوال 2: اگر زنجیره مارکف unichain باشد $\Leftrightarrow P = \pi$ یک جواب یکتای
بردار افاداتی دارد.

اگر زنجیره مارکف k کلاک بازگشتی داشته باشد $\Leftrightarrow P = \pi$ k جواب مستقل خطی
به شکل بردار افاداتی دارد.

هر بردار حالت باید در متناظر با یک کلاک بازگشتی
که روی حالت های آن کلاک غیر منفی
و بقیه جابجا منفی است.

بردار افاداتی

پاسخ سوال 3: هر P^n به جواب یکتای $P^n = \pi$ میل می کند
 $\Leftrightarrow$ زنجیره باید ergodic unichain باشد

اگر زنجیره چند کلاک یا زنجری که در کدام می توانی باشد
 $\Leftarrow \hat{P}$ برای n های بزرگ یک ماتریس میل می کند که
توسط هر طریقی آن را می بینیم.

اگر مقدماتی از کلاک های یا زنجری می توانی باشد
 $\Leftarrow \hat{P}$ برای n های بزرگ اصلاً هگزامی شود.

.....
• اصلاً با پاسخ به سوال 3 شروع می کنیم.

• هم : فرض کنیم $\underline{P}$ ماتریس که از یک زنجیره مارکوف متناهی حالت باشد.

در این صورت برای هر حالت $i \in S$ و هر عدد $n \geq 1$ داریم :

$$\max_i P_{ij}^{n+1} \leq \max_j P_{ij}^n$$

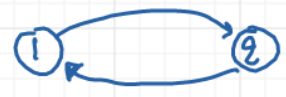
$$\min_i P_{ij}^{n+1} \geq \min_l P_{lj}^n$$

اثبات: برای هر j و n با توجه به رابطه Chapman-Kolmogorov داریم:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n+1} &= \sum_{k=1}^M P_{ik} P_{kj}^n \leq \sum_k P_{ik} \cdot \max_l P_{lj}^n \\ &= \max_l P_{lj}^n \end{aligned}$$

$$\max_i P_{ij}^{n+1} \leq \max_l P_{lj}^n \Leftrightarrow \text{به ازای } j \text{ درست است}$$

مثال: زنجیره مارکوف متناوب و غیر قابل برگشت:

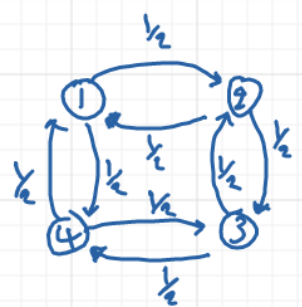


دوره متناوب این زنجیره $2 =$
این زنجیره unichain است.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \Rightarrow \underline{P}^3 = \underline{P} \Rightarrow \underline{P}^4 = \underline{I}$$

این جواب یکسانی به درازمانی: $\underline{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow \underline{x} = \underline{P} \underline{x}$

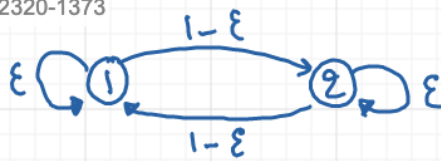
مثال: زنجیره مارکوف متناوب زیر را در نظر بگیرید:



$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{P}^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{P}^4 = \underline{P}^2 \dots$$



• مثال: زنجیره مارکوف زیر را در نظر بگیرید:
(تقریبی: ε خیلی کوچک و ε ≠ 0)

دوره تناوب این زنجیره = 1 ⇔ غیر تناوبی
این زنجیره یک unichain هم هست

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{P}^2 = \begin{bmatrix} \epsilon^2 + (1-\epsilon)^2 & 2\epsilon(1-\epsilon) \\ 2\epsilon(1-\epsilon) & \epsilon^2 + (1-\epsilon)^2 \end{bmatrix}$$

نمونه اول نیست به ε

$$\approx \begin{bmatrix} 1-2\epsilon & 2\epsilon \\ 2\epsilon & 1-2\epsilon \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^3 = \begin{bmatrix} \epsilon^3 + 3\epsilon(1-\epsilon)^2 & (1-\epsilon)^3 + 3\epsilon^2(1-\epsilon) \\ (1-\epsilon)^3 + 3\epsilon^2(1-\epsilon) & \epsilon^3 + 3\epsilon(1-\epsilon)^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3\epsilon & 1-3\epsilon \\ 1-3\epsilon & 3\epsilon \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{1} \underline{P} \Rightarrow \underline{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• حالت پایدار یا فرض $P > 0$:

در این حالت $\forall ij \in S: P_{ij} > 0$

ل: فرض کنید برای ماتریسی گذار یک زنجیره مارکوف متناهی حالت داشته باشیم $P > 0$ و

تقریب کنیم : $\alpha \leq \min_{ij} P_{ij}$.

→ در این صورت برای هر حالتی در هر عدد صحیح $n \geq 1$ داریم :

①
$$\max_i P_{ij}^{n+1} - \min_l P_{lj}^{n+1} \leq (\max_i P_{ij}^n - \min_l P_{lj}^n) \underbrace{(1-2\alpha)}_{< 1}$$

②
$$\max_i P_{ij}^n - \min_l P_{lj}^n \leq (1-2\alpha)^n$$

③
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i P_{ij}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_l P_{lj}^n \geq \alpha > 0$$