

قرایندهای تصادفی: جلسه 19 و 13 اردیبهشت 1400

- * حالت پایدار با فرض $P \geq 0$
- * حالت پایدار برای زنجیره‌های ergodic
- * حالت پایدار برای ergodic unichain

* حالت پایدار زنجیره مارکوف با فرض $P \geq 0$
اثبات‌های مهم بیان شده طبقه قبلی:

برای هر n و هر عدد صحیح $n \geq 1$:
فرض: l_{min} مقدار l ای که P_{lj}^n را کمینه می‌کند.

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_k P_{ik} P_{kj}^n = \sum_{k \neq l_{min}} P_{ik} P_{kj}^n + P_{il_{min}} P_{l_{min}j}^n$$
$$\leq \sum_{k \neq l_{min}} P_{ik} \max_l P_{lj}^n + P_{il_{min}} P_{l_{min}j}^n$$

$$= \underbrace{\sum_k P_{ik}}_{=1} \cdot \max_l P_{lj}^n - P_{il_{\min}} \cdot \max_l P_{lj}^n + P_{il_{\min}} P_{l_{\min}j}^n$$

$$= \max_l P_{lj}^n - \underbrace{P_{il_{\min}}}_{\alpha} \underbrace{(\max_l P_{lj}^n - \min_l P_{lj}^n)}_{\geq 0}$$

$$\leq \max_l P_{lj}^n - \alpha (\max_l P_{lj}^n - \min_l P_{lj}^n)$$

$$P_{ij}^{n+1} \geq \min_l P_{lj}^n + \alpha (\max_l P_{lj}^n - \min_l P_{lj}^n) \quad \text{برای } i \neq j$$

! $\max_j$ که متن از راجه اول و $\min_i$ که متن از راجه دوم و کم کردن راجه دوم

از رابطه اول که اصل داشت:

$$\max_i^{n+1} P_{i\cdot} - \min_i^{n+1} P_{i\cdot} \leq \max_l^n P_{lj} - \min_l^n P_{lj} - 2\alpha (\max_l^n P_{lj} - \min_l^n P_{lj})$$
$$= (\max_l^n P_{lj} - \min_l^n P_{lj}) \underbrace{(1-2\alpha)}_{< 1}$$

✓

• برای اثبات رابطه دوم که به صورت زیر می‌کنیم:

دستی کنیم:

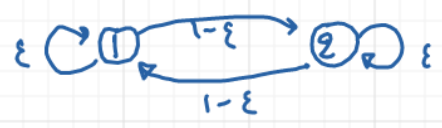
$$\left. \begin{aligned} \min_l P_{lj} &\geq \alpha > 0 \\ \max_l P_{lj} &\leq 1-\alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \max_l P_{lj} - \min_l P_{lj} \leq 1-2\alpha$$

$$\Rightarrow \text{رابطه بارزنی}$$
$$(\max_l^n P_{lj} - \min_l^n P_{lj}) \leq (1-2\alpha)^n$$

• از کم قبلی ← تغییرات $\max_l P_{lj}^n$, $\min_l P_{lj}^n$ بر حسب n یکپارچه می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i P_{ij}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_i P_{ij}^n \geq \alpha > 0$$

 $\Leftarrow$



* یادآوری مثال طبقه قبلی :

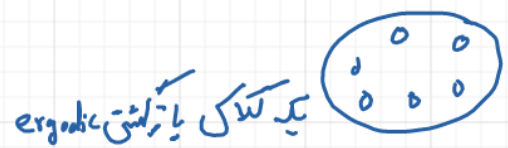
$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \underline{1} = \underline{1} \underline{P} \Rightarrow \underline{1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از $\Rightarrow$ $\underline{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

همچنین می‌توانیم به در حالت پایدار $\underline{1}$ یکپارچه است.

$$\underline{\mu} = [a \quad b] \Rightarrow \underline{\mu} = \underline{1} \underline{P}$$

$$\Rightarrow [a \ b] = [a \ b] \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & \epsilon \end{bmatrix}$$
$$= [a\epsilon + b(1-\epsilon) \quad a(1-\epsilon) + b\epsilon]$$
$$\Rightarrow \boxed{a=b}$$



• حالت پایدار زنجیره ergodic :

لر قبل را به زنجیره‌های ergodic گسترش دهیم.
قبلا می‌پایان که می‌دانیم که برای یک زنجیره مارکوف متناهی حالت ergodic برای

هر عدد صحیح $h \geq (n-1)^2 + 1$ و برای هر $i, j \in S$ داریم :

$$P_{ij}^h > 0 \quad \rightarrow M=|S|$$

$\Leftrightarrow$ هر قبل را برای h می‌توانیم $\underline{P}^h > 0$ انی‌لی کنیم :

$(\underline{Q} = \underline{P}^h)$

$$\max_i \underbrace{P_{ij}^{h(m+1)}}_{=Q_{ij}^{m+1}} - \min_i P_{ij}^{h(m+1)} \leq (\max_i P_{ij}^{h_m} - \min_i P_{ij}^{h_m})(1-2\beta)$$

$\beta = \min_{ij} P_{ij}^h > 0$

$$\Rightarrow \max_i P_{ij}^{h_m} - \min_i P_{ij}^{h_m} \leq (1-2\beta)^m \quad \text{بر حسب مقدار } h \text{ است}$$

ولی ما در نهایت برای هر توان n می‌توانیم P بنویسیم که برای نشان دهیم.

$$\max_i P_{ij}^n - \min_i P_{ij}^n \leq \max_i P_{ij}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor \cdot h} - \min_i P_{ij}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor \cdot h}$$

$$\leq (1-2\beta)^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} < 1$$

با استرکچر از هم جابجایی
که یکدای $\max$ ، $\min$ و نشان

نشان می‌دهد.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_i P_{ij}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_i P_{ij}^n \geq \beta > 0$$

$\uparrow$
 $\triangleq \pi_j$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi_j, \quad \forall i \in S$$

$\hookrightarrow$ بردار حالت پایدار و پایداری

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \underline{e} \cdot \underline{\pi} \rightarrow [\pi_1, \dots, \pi_m] = \begin{bmatrix} -\underline{\pi} - \\ \vdots \\ -\underline{\pi} - \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$\hookrightarrow = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

جمع پذیری مشخصات بالا ؛
* مقصود: برای یک زنجیره مارکوف متناهی حالت ergodic با بیشترین گذار $\underline{P}$

یک بردار یکتای حالت پایدار پیوسته داریم که ؛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \underline{e} \cdot \underline{\pi}$$

یا توصیه به حرف های یا لا مفقده یا به میکتایی $\underline{P}$ را نشان دهیم:

فرض می کنیم بردار احتمالی $\underline{\mu}$ هم یک بردار حالت پایدار باشد:

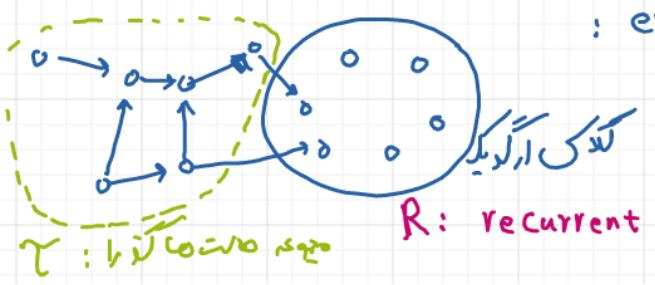
$$\underline{\mu} = \underline{\mu} \underline{P}$$

$$\underline{\mu} = \underline{\mu} \underline{P}^n$$

$$\underline{\mu} = \underline{\mu} \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \underline{\mu} \cdot \underbrace{e}_{=1} \cdot \underline{x} = \underline{x}$$

برای $n \geq 1$ $\Leftarrow$
بردارهای $\underline{P}^n$ با فرض $n \rightarrow \infty$
بردار ستونی $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

* حالت پایدار یک ergodic unichain :



بدون از دست رفتن کلیت ماتریس گذار $\underline{P}$ به شکل زیر است:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{P}_{\tau\tau} & \underline{P}_{\tau R} \\ \hline \underline{0} & \underline{P}_{RR} \end{array} \right] \begin{array}{l} \updownarrow \tau \\ \updownarrow R \end{array}$$

$\xleftarrow{\tau} \quad \xleftarrow{R}$

• با دستکاری از $\underline{P}$ (برای اثبات دقیق به فصل 4 کتاب مراجعه شود):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \begin{matrix} -\underline{x}' \\ \vdots \\ -\underline{x}' \end{matrix} \\ \hline \underline{0} & \underline{P}_{RR}^n \end{array} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{e}' \cdot \underline{x}'$$

• در نتیجه: ضرب کنیم برداری با $\underline{x}'$ که از اضافه کردن تعداد کافی صفر به بردار $\underline{x}'$

ساخته شده باشد:

$$\underline{x} = \left[\begin{array}{c} 0 \dots 0 \end{array} \right] \underline{x}' \rightarrow 1 \times M$$

می توان نشان داد $\underline{x}$ بردار حالت پایدار زنجیره مارکوف ما است:

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda} \underline{P} \quad \xleftrightarrow{R} \quad R$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \underline{e} \cdot \underline{\lambda} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & -\underline{\lambda}' \\ \hline \underline{0} & -\underline{\lambda}' \end{array} \right]$$

و مانند قبل هکرای به صورت هندسی نیست ب n خواص یزد