فرایند های تصادفی: جلسه ۲۰، 18 اردیبهشت ۱۴۰۰

* مطالب جلسه:

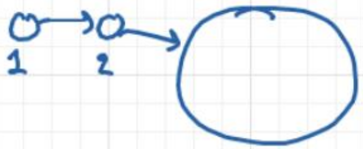
- حالت پایدار برای زنجیره‌های مارکف با تعداد حالت $M=2$
- حالت پایدار برای زنجیره‌های مارکف متناهی حالت دلخواه
- چند مثال

* مرور گذشته:

- اگر یک ergodic MC ⟵ $\lim_{n\to\infty} \underline{\underline{P}}^n = \underline{e}\cdot\underline{\pi}$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}, \quad \underline{\pi} = [\pi_1 \cdots \pi_M] \; : \; \underline{\pi} = \underline{\pi}\,\underline{\underline{P}}, \; \underline{\pi} \geq 0, \; \sum \pi_i = 1$$

- اگر ergodic unichain:



ergodic class: k حالت دارد

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\underline{P}}^n = \underline{e}\cdot\underline{\pi} \longrightarrow \underline{\pi} = [\underbrace{0 \cdots 0}_{\text{حالت‌های گذرا}} \;\; \underbrace{\pi_1 \cdots \pi_k}_{\text{بردار حالت پایدار کلاس ergodic}}]$$

Whiteboard 8928672-4102-2363

• مرور مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس مربعی :

بردار ویژه سمت راست :

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v} \qquad (\underline{v} \neq 0)$$

eigen value — eigen vector

معادل با
$$\Longrightarrow \quad (\underline{\underline{P}} - \lambda \underline{\underline{I}})\,\underline{v} = \underline{0}$$

اگر به دنبال یافتن جواب‌های غیر بدیهی معادله بالا باشیم :

$$\Leftrightarrow \ \underline{\underline{P}} - \lambda \underline{\underline{I}} \ \text{معکوس پذیر نباشد} \ \Leftrightarrow \ \det(\underline{\underline{P}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

⟸ یک چند جمله‌ای از درجه M بر حسب λ می‌دهد ⟸

⟶ از قضیه اساسی جبر

برای λ در مقدارهای مختلط M جواب بدست می‌آید.

$$\underbrace{\text{جواب}}_{\text{eigen values of } \underline{\underline{P}}}$$

بعد از یافتن λ ها :

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}$$

با حل این معادله به ازای هر λ ⟵ بردار ویژه مربوطه.

نکته: اگر $\underline{v}$ بردار ویژه باشد ← $\alpha \underline{v}$ بردار ویژه است برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$

به طور مشابه می‌توان بردار ویژه‌های سمت چپ ماتریس $\underline{\underline{P}}$ را هم تعریف کرد:

$$\underline{x}\,\underline{\underline{P}} = \lambda \underline{x}$$

نکته: مقادیر ویژه بردارهای ویژه سمت چپ و سمت راست یکسانند.

• به صورت خاص ماتریس $\underline{\underline{P}}$ با Stochastic است: $\forall i: \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ← فرض: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

① $\lambda_1 = 1$ یکی از مقادیر ویژه‌های ماتریس $\underline{\underline{P}}$ است.

$$\underline{\underline{P}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

② برای هر مقدار ویژه λ_i ماتریس $\underline{\underline{P}}$: $|\lambda_i| \leq 1$

(بدون اثبات)

③ نحوه رفتار $\underline{\underline{P}}^n$ به اندازه دومین بزرگترین مقدار ویژه $\underline{\underline{P}}$ بستگی دارد.

• رفتار یک زنجیره مارکوف با دو حالت ، $M=2$:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \begin{matrix} \Rightarrow P_{11}+P_{12}=1 \\ \Rightarrow P_{21}+P_{22}=1 \end{matrix}$$

مقادیر ویژه :

$$\det(\underline{\underline{P}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (P_{11}-\lambda)(P_{22}-\lambda) - P_{12}P_{21} = 0$$

معادله درجه 2 برحسب λ ⟵ ریشه ها :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 - P_{12} - P_{21}$$

• بردار ویژه‌های ماتریس $\underline{\underline{P}}$ برای $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$(\text{چپ}) \begin{cases} \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \lambda \pi_1 \\ \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} = \lambda \pi_2 \end{cases} \qquad (\text{راست}) \begin{cases} P_{11} v_1 + P_{12} v_2 = \lambda v_1 \\ P_{21} v_1 + P_{22} v_2 = \lambda v_2 \end{cases}$$

• با فرض اینکه P_{12} و P_{21} هر دو صفر نباشند:

λ_1: $u_1^{(1)} = \frac{P_{21}}{P_{12}+P_{21}}$, $u_2^{(1)} = \frac{P_{12}}{P_{12}+P_{21}}$ | $v_1^{(1)} = 1$, $v_2^{(1)} = 1$

λ_2: $u_1^{(2)} = 1$, $u_2^{(2)} = -1$ | $v_1^{(2)} = \frac{P_{12}}{P_{12}+P_{21}}$, $v_2^{(2)} = \frac{-P_{21}}{P_{12}+P_{21}}$

بردارهای ویژه به گونه‌ای انتخاب شده است که: $u^{(1)}$ یک بردار احتمالاتی باشد

و $\underline{u}^{(i)}\,\underline{v}^{(i)} = 1$ برای $i=1,2$.

و $\underline{u}^{(1)}\,\underline{v}^{(2)} = 0$, $\underline{u}^{(2)}\,\underline{v}^{(1)} = 0$.

ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

بردار ویژه‌های سمت راست

ماتریس $\underline{P}$

Whiteboard 8928672-4102-2363

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}$$

در نتیجه برای رابطه $\underline{\underline{P}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$ داریم :

می توان جدا کرد که :

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1^{(1)} \quad \lambda_2^{(1)}} \\ \boxed{\lambda_1^{(2)} \quad \lambda_2^{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P}}^{n} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{n}\,\underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P}}^{n} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_2^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} v_1^{(1)} \lambda_1^{n} + \lambda_1^{(2)} v_1^{(2)} \lambda_2^{n} & \lambda_2^{(1)} v_1^{(1)} \lambda_1^{n} + \lambda_2^{(2)} v_1^{(2)} \lambda_2^{n} \\ \lambda_1^{(1)} v_2^{(1)} \lambda_1^{n} + \lambda_1^{(2)} v_2^{(2)} \lambda_2^{n} & \lambda_2^{(1)} v_2^{(1)} \lambda_1^{n} + \lambda_2^{(2)} v_2^{(2)} \lambda_2^{n} \end{bmatrix}$$

Whiteboard 8928672-4102-2363

$$= \begin{bmatrix} \pi_1 + \pi_2 \lambda_2^n & \pi_2 - \pi_2 \lambda_2^n \\ \pi_1 - \pi_1 \lambda_2^n & \pi_2 - \pi_1 \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2) = \underline{\pi}^{(1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{P}^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \underline{e} \cdot \underline{\pi}^{(1)} \Leftarrow$$ اگر $|\lambda_2| < 1$

$\lambda_2 = 1 - P_{12} - P_{21}$

اگر $|\lambda_2| = 1$ $\leftarrow$ در اینجا دو حالت خاص بیشتر نداریم:

$\Leftarrow \lambda_2 = 1 \leftarrow P_{12} = P_{21} = 0$ ①

یک زنجیره مارکف با دو کلاس بازگشتی

$\Leftarrow \lambda_2 = -1 \leftarrow P_{12} = P_{21} = 1$ ②