Whiteboard 7934025-6783-2266

فرایندهای تصادفی: جلسه 23 ، 1 خرداد 1400

* مطالب این جلسه
• آمار کافی کمین (Minimal Sufficient Statistics)
• اصل likelihood

• قضیه factorization

$$\forall \underline{x}, \theta \quad f(\underline{x} \mid \theta) = h(\underline{x}) \cdot g(T(\underline{x}) \mid \theta)$$

$\Leftrightarrow$ $T(\underline{x})$ آمار کافی برای θ

• تاکنون $T(\underline{x}): \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$

در حالت کلی آمار کافی می‌تواند به شکل: $T(\underline{x}): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$

معمولاً وقتی این حالت را داریم که $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_s)$

در این حالت کلی هم قضیه factorization برقرار است.

* مثال: فرض کنید که $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی iid گاوسی $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. فرض می‌کنیم که μ و σ نامعلوم هستند. $\Leftarrow$ $\underline{\theta} = (\mu, \sigma^2)$

با توجه به قضیه factorization داریم:

$$f(\underline{x} \mid \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / 2\sigma^2\right) \times$$

$$\exp\left(-n(\bar{x} - \mu)^2 / 2\sigma^2\right)$$

اگر تعریف کنیم: $T_1(\underline{x}) = \bar{x}$ ، $T_2(\underline{x}) = S^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

، $h(\underline{x}) = 1$ و

$$g(\underline{t} \mid \underline{\theta}) = g(t_1, t_2 \mid \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}$$

$$\exp\left(-\frac{n(t_1 - \mu)^2 + (n-1)t_2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}|\mu,\sigma^2) = h(\underline{x})\cdot g(T_1(\underline{x}), T_2(\underline{x}) \,|\, \mu,\sigma^2)$$

$\xrightarrow[\text{Thm.}]{\text{fact.}}$ $\underline{T}=(T_1,T_2)$ یک آماره کافی برای μ, σ^2 است.

$= (\bar{X}, S^2)$

• نکته مهم: آماره کافی به مدل وابستگی دارد.

---

* آماره کافی کمین (Minimal Sufficient Statistics):

برای یک مسئله می‌توانیم چندین آماره کافی داشته باشیم.

به عنوان مثال: در هر مسئله‌ای همه مشاهدات $\underline{X}$ یک آماره کافی برای پارامتر $\underline{\theta}$ مدل است.

$$f(\underline{x}|\underline{\theta}) = f(T(\underline{x})|\underline{\theta})\cdot h(\underline{x})$$

که $T(\underline{x})=\underline{x}$, $h(\underline{x})=1$ $\xleftarrow[\text{fact.}]{\text{قضیه}}$ $\underline{x}$ یک آماره کافی برای $\underline{\theta}$ است.

• به عنوان مثالی دیگر:

قضیه: هر تابع یک به یک از یک آماره کافی خودش یک آماره کافی است.

اثبات: فرض کنید $T(\underline{x})$ یک آماره کافی باشد و تعریف می‌کنیم

$$T^*(\underline{x}) = r(T(\underline{x}))$$

معکوس آن $\Leftarrow$ یک تابع یک به یک

r^{-1} است.

با استفاده از قضیه:

$$f(\underline{x}|\theta) = g(T(\underline{x})|\theta)\cdot h(\underline{x})$$

$$= g(\underbrace{r^{-1}(T^*(\underline{x}))}_{=T(\underline{x})}|\theta)\cdot h(\underline{x})$$

اگر تعریف کنیم: $g^*(t|\theta) = g(r^{-1}(t)|\theta)$

$$= g^*(T^*(\underline{x})|\theta)\cdot h(\underline{x}) \xRightarrow[\text{Thm.}]{\text{fact.}}$$ T^* یک آماره کافی برای θ

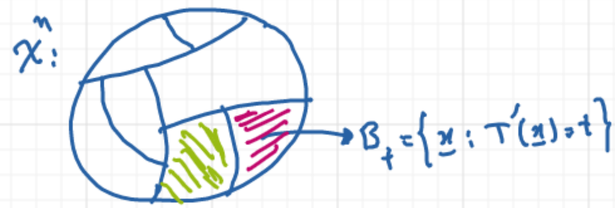
• سوال: آیا بعضی از این آماره‌های کافی به برخی دیگر ارجحیت دارند یا نه.

• آماره کافی کمین (Minimal Suff. Stat.):

آماره کافی $T(\underline{x})$ یک آماره کافی کمین است اگر که برای هر آماره کافی دیگری مانند $T'(\underline{x})$، $T(\underline{x})$ تابعی از $T'(\underline{x})$ است.

به این معنی که: اگر $T(\underline{x})=T(\underline{y}) \Longleftarrow T'(\underline{x})=T'(\underline{y})$

$T(\underline{x})$



$T'(\underline{x})$

برای هر مجموعه‌ای B_t وجود دارد یک مجموعه A_t که $B_{t'} \subseteq A_t$.

• قضیه: فرض کنید $f(\underline{x}|\theta)$ تابع چگالی یا جرم احتمال مشاهدات $\underline{X}$ باشد. همچنین فرض کنید یک تابع $T(\underline{x})$ وجود داشته باشد که برای هر دو نمونه $\underline{x}$ و $\underline{y}$ داشته باشیم:

$$T(\underline{x}) = T(\underline{y}) \iff \frac{f(\underline{x}|\theta)}{f(\underline{y}|\theta)} : \text{مستقل از } \theta$$

آنگاه $T(\underline{x})$ یک آمار کافی کمین است.

• مثال: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای گاوسی iid $N(\mu, \sigma^2)$ باشند که μ و σ^2 نامعلوم هستند.

$\underline{x}$ و $\underline{y}$: دو مشاهده $\longleftarrow$ $(\bar{x}, S_x^2)$, $(\bar{y}, S_y^2)$

برای نسبت توزیع‌ها در این دو نقطه:

$$\frac{f(\underline{x}|\mu,\sigma^2)}{f(\underline{y}|\mu,\sigma^2)} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\left(n(\bar{x}-\mu)^2 + (n-1)S_x^2\right)/2\sigma^2\right]}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\left(n(\bar{y}-\mu)^2 + (n-1)S_y^2\right)/2\sigma^2\right]}$$

$$= \exp\left[\frac{-n(\bar{x}-\bar{y})^2 + 2n\mu(\bar{x}-\bar{y}) + (n-1)(S_x^2 - S_y^2)}{2\sigma^2}\right]$$

(μ,σ^2) مستقل از $\Longleftrightarrow$ $\bar{x}=\bar{y}$, $S_x^2 = S_y^2$

$\Leftarrow$ بنابر قضیه بالا $T=(\bar{X}, S^2)$ یک آماره کافی مینیمال برای μ,σ^2 است.