Whiteboard 71022131-7775-1717

فرایند های تصادفی: جلسه 27 : 25 خرداد 1400

* مطالب امروز:

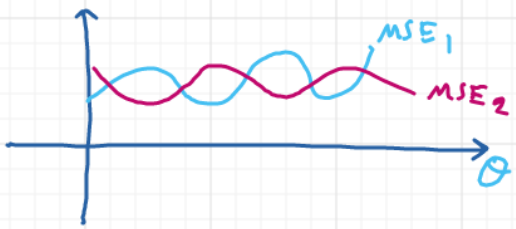
• ارزیابی تخمگر ها

• بهترین تخمگر بدون بایاس

* خطای MSE برای یک تخمگر W برای پارامتر θ :

$$MSE_W(\theta) = E[(W-\theta)^2]$$

$W(X_1, \dots, X_n)$



Whiteboard 71022131-7775-1717

* مثال: $W = 15$ $\underbrace{\text{برای } \theta = 15}_{\text{خیلی تخمینگر قوی است}}$ ← $MSE = 0$

ولی برای بقیه مقادیر θ تخمینگر بدی است.

* یک راه برای پیدا کردن بهترین تخمینگر ← کلاس جستجوی تخمینگرها را محدود کنیم.

← در این راستا یک کلاس خیلی معقول و محبوب ← کلاس تخمینگرهای بدون بایاس برای پارامتر θ

← فرض: w_1 و w_2 تخمینگرهای بدون بایاس برای θ:

$$\mathbb{E}[w_1] = \mathbb{E}[w_2] = \theta$$

$$\Rightarrow MSE_{w_1} = Var[w_1] + (\underbrace{Bias[w_1]}_{(\mathbb{E}[w_1]-\theta)})^2 = Var[w_1]$$

Whiteboard 71022131-7775-1717

$$MSE_{w_2} = Var[w_2]$$

* حرفی که می‌زنیم حتی کلی‌تر هم هست.

فرض: w^* تخمینگری برای θ باشد با $\mathbb{E}[w^*] = \tau(\theta)$

برای کلاس تخمینگرهای $C_\tau = \{w : \mathbb{E}[w] = \tau(\theta)\}$

$\Leftarrow$ برای مقایسه $w_1, w_2 \in C_\tau$ ← کافی است واریانس‌های آنها را نگاه کنیم.

زیرا: $Bias[w_1] = Bias[w_2] = \tau(\theta) - \theta$

---

* تعریف: بهترین تخمینگر بدون پایاس:

تخمینگر w^* بهترین تخمینگر بدون پایاس برای $\tau(\theta)$ اگر که

$$\mathbb{E}[w^*] = \tau(\theta) \quad : \quad \forall \theta$$

Whiteboard 71022131-7775-1717

ویژگی: هر تخمینگر دیگر w با $E[w]=\tau(\theta)$ و واریانس‌پذیر:

$$\forall \theta : \quad Var[w^*] \leq Var[w]$$

اگر w^* وجود داشته باشد ← uniform minimum variance unbiased estimator (UMVUE)

*مثال: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ مشاهدات iid از توزیع پواسن با پارامتر λ.

$$X \sim Poisson(\lambda) \longrightarrow E[X]=\lambda, \; Var[X]=\lambda$$

برای λ دو تخمینگر میانگین نمونه و واریانس را در نظر گرفتیم:

$$E[\bar{X}] = \lambda$$

$$E[S^2] = \lambda$$

برای مقایسه این دو تخمینگر باید واریانس‌های آنها را بررسی کنیم:

Whiteboard 71022131-7775-1717

$$Var[\bar{X}] = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n}$$

$Var[S^2]$: کمی محاسبات طولانی‌تری دارد.

$Var[\bar{X}] \leqslant Var[S^2] \quad : \forall \lambda$ برای این مثال درست است:

هنوز جایزا ادامه دارد: دسته تخمینگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$W_a(\bar{X}, S^2) = a\bar{X} + (1-a)S^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[W_a] = \lambda \quad : \forall a$$

⇐ سوال: کدامیک از W_a ها بهتر است؟ (با چه MSE)

سوال: چگونه می‌توانیم یک UMVUE را پیدا کنیم؟

یک راه ممکن: برای تخمین $\tau(\theta)$ از توزیع $f(x|\theta)$ می‌توانیم یک کران فرض کنیم

Whiteboard 71022131-7775-1717

پایین برای واریانس هیچ تخمگرهایی ارایه کنیم.

اگر تخمگر W^* واریانس برابر کران پایین مورد نظر را داشته باشد $\leftarrow W^*$ تخمگر بهینه بدون بایاس برای پارامتر $\psi(\theta)$.

کران Cramer-Rao :

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهایی از نمونه‌گیری $f(\underline{x}|\theta)$ باشند و $W(\underline{X}) = W(X_1, \dots, X_n)$ تخمگر دلخواهی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\theta} E[W(\underline{X})] = \displaystyle\int_{\chi^n} W(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\underline{x}|\theta)\, d\underline{x} \\ \\ \mathrm{Var}[W(\underline{X})] < \infty \end{cases}$$

Whiteboard 71022131-7775-1717

نامساوی کرامر-رائو:

$$\mathrm{Var}[W(\underline{X})] \geq \frac{\left(\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}[W(\underline{X})]\right)^2}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{X}|\theta)\right)^2\right]}$$

• نتیجه: کران CR برای مشاهدات iid:

$$\mathrm{Var}[W(\underline{X})] \geq \frac{\left(\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}[W(\underline{X})]\right)^2}{n\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta)\right)^2\right]}$$

* اطلاعات فیشر:

$$I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{X}|\theta)\right)^2\right]$$

اگر $I(\theta)$ بزرگ باشد ← کران پایین واریانس کوچک است.

---- کوچک باشد ← ---- بزرگ ---.

Whiteboard 71022131-7775-1717

* برای حالت خاص: $E[W] = \theta$

$$\Rightarrow \quad Var[W(\underline{X})] \geq \frac{1}{I(\theta)} \rightarrow \left(\frac{d}{d\theta}\theta\right)^2 = 1$$

* لم: اگر $f(x|\theta)$ در شرط زیر صدق کند:

$$\frac{d}{d\theta} E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x|\theta)\right] = \int \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x|\theta)\right) f(x|\theta)\right] dx$$

آنگاه:

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x|\theta)\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln \boxed{f(x|\theta)}\right]$$

$\boxed{f(x|\theta)} \rightarrow L(\theta|x)$

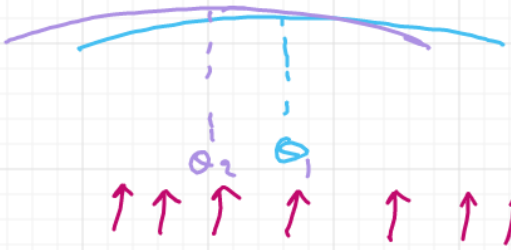
یک رابطه با انتگرال توزیع دارد.

اگر توزیع انتگرال پذیری را داشته باشد ← مشتق دو بزرگ ← اطلاعات فیشر نیز بزرگ است

← کران پایین واریانس کوچک است.

Whiteboard 71022131-7775-1717

مثال این مشاهدات بیشتر ← از مشاهدات اطلاعات خوبی در مورد θ به دست می‌آوریم.



اوضاعت دیگر:

مشاهدات قبلی در مورد مقدار θ اطلاعات کمتری دارد ← واریانس تخمینگرها بالاتر

• مثال: به مثال توزیع پواسن برمی‌گردیم. $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\bar{X}$ بهترین تخمینگر بدون بایاس برای λ است.

$$\text{Var}[W] \geq \frac{1}{I(\lambda)} \quad \Leftarrow \quad \frac{d}{d\theta} W(\underline{X}) = \tau'(\lambda) \leftarrow \tau(\lambda) = \lambda$$
$$= 1$$

Whiteboard 71022131-7775-1717

$$I(\lambda) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\prod_{i=1}^{n} f(X_i|\lambda)\right)^2\right] = n\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(X|\lambda)\right)^2\right]$$

می‌توانیم چک کنیم لم قبلی برقرار است.

$$= -n\,\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!}\right)\right]$$

$$= -n\,\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(-\lambda + X\ln\lambda - \ln X!\right)\right]$$

$$= -n\,\mathbb{E}\left[-\frac{X}{\lambda^2}\right] = \frac{n}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad Var[W] \geq \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} = Var[\bar{X}]$$

در ابتدای جلسه دیده بودیم

$\Rightarrow$ میانگین نمونه کران CR را achieve می‌کند

Whiteboard 71022131-7775-1717

$\Rightarrow$ $\bar{X}$ بهترین تخمینگر بدون بایاس برای λ (با معیار MSE).