آمار و احتمال مهندسی، جلسه 2 : 25 بهمن 1400

---

* مقدمه

- احتمال و استقراء (Probability and Induction)

* مروری بر نظریه مجموعه‌ها

* در باب ساختن یک مدل برای احتمال

- پارادوکس برتراند

* اصول موضوعه آمار و احتمال

- تعریف میدان سیگما ($\sigma$-field)
- تعریف تابع احتمال

---

* احتمال و استقراء:

- فرض کنید برای واقعه A احتمال وقوع آن را به نحوی بدست آورده‌ایم.
- سوال: در مشاهده بعدی چه حرفی در مورد وقوع واقعه A می‌شود زد؟

به نظر می‌آید پاسخ به این سوال در دو حالت قابل بررسی است:

① مثلا $P[A]=0.7$ باشد ← خیلی حرف روشنی در مورد وقوع واقعه A نمی‌زند. بیشتر انگار نظر ما را در مورد وقوع A بیان می‌کند. و با آزمایش هم راحت نمی‌توان آن را بررسی کرد.

← بیان Subjective

② مثلا $P[A]=0.999$ باشد ← با قطعیت خیلی بالا A اتفاق می‌افتد. و اگر اتفاق نیفتد ما تعجب می‌کنیم. نسبت به حالت قبلی این قابلیت را داریم که با آزمایش تست کنیم و واقعا این حرف درست است یا نه.

← بیان Objective

- این مرزها خیلی دقیق نیست و مرز مشخص هم بین این دو حالت برقرار نیست.

- تئوری احتمالات این اجازه را می‌دهد که یک گزاره از جنس حالت اول را به تئوری یک گزاره از جنس حالت دوم تبدیل کنیم (با فرض اینکه آزمایش‌ها تکرارپذیر باشند).

- مثلاً فرض کنید $\mathbb{P}[A]=0.7$ و آزمایش مورد نظر را 1000 بار تکرار کنیم.

$$B = \left\{ \text{در 1000 تکرار، واقعه A بین 650 تا 750 بار اتفاق بیافتد} \right\}$$

می‌توان با استفاده از ابزار تئوری احتمالات نشان داد که احتمال وقوع B خیلی بالاست، یعنی $\mathbb{P}[B] \simeq 0.999$

---

* مروری بر نظریه مجموعه‌ها:

- مجموعه مرجع (universal set): مجموعه همه اعضای مورد علاقه ماست.

53-7743

با $\Omega$ نشان داده می‌شود. ←

• مجموعه تهی ← $\emptyset$

• $A$ زیرمجموعه $B$ است: $A \subset B$ اگر که $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

• اگر $A$ $n$ عضو داشته باشد ← $2^n$ زیرمجموعه دارد.

• در حالت کلی همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه را با $2^A$ نشان می‌دهند.

• داریم: $\emptyset \subset A \subset A \subset \Omega$

• داریم: if $C \subset B$ & $B \subset A \Rightarrow C \subset A$

$$A = B \iff A \subset B \ \& \ B \subset A$$

• اجتماع دو مجموعه: $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \underset{\text{یا}}{\vee} \ x \in B\}$

• خواص اجتماع:

$A \cup B = B \cup A$

7743

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$$

• می‌توان نشان داد:

اگر $B \subset A$ ← $A \cup B = A$

$\Rightarrow A\cup A = A$

$\Rightarrow A\cup \emptyset = A$

$\Rightarrow A\cup \Omega = \Omega$

• اشتراک دو مجموعه: $A\cap B = \{x \mid x\in A \underset{\uparrow \atop \text{و}}{\wedge} x\in B\}$

• خواص:

$A\cap B = B\cap A$

$A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

• می‌توان نشان داد اگر $A \subset B$ آنگاه $A\cap B = A$

$$\Rightarrow A \cap A = A$$

$$\Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \Omega = A$$

• مجموعه های دوبه‌دو متمایز (mutually exclusive sets):

دو مجموعه متمایز $\longleftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

مجموعه های $A_1, A_2, \ldots$ دوبه‌دو متمایز هستند اگر که

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$$

• یک افراز مجموعه $\Omega$ یک تعداد زیر مجموعه دوبه‌دو متمایز هستند که

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \Omega$$

• مجموعه مکمل: مکمل مجموعه $A$ را با $A^c$ نمایش می دهیم:

$$A^c = \{x \mid x \in \Omega , x \notin A\}$$

• خواص:

$$\Omega^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = \Omega$$

$$\emptyset^c = \Omega \qquad A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

اگر $B \subset A \Rightarrow A^c \subset B^c$

$$A = B \iff A^c = B^c$$

• تفاضل دو مجموعه:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$= A \cap B^c$$

• می‌توان نشان داد:

$$A \subset B \iff A \cap B^c = A - B = \emptyset$$

• قوانین دمورگان :

① $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

② $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

اثبات دومی از عبارت اول :

① $\rightarrow (A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$

$\xrightarrow{\text{مکمل گیری}} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

• قوانین توزیع پذیری :

① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

---

* ساختن یک مدل برای احتمالات :

• اولین قدم برای مدل کردن یک پدیده تصادفی ← حالات مختلف یا خروجی های مختلف آن پدیده را بشناسیم.

• فضای نمونه: مجموعه خروجی های یک پدیده تصادفی:

$$\Omega = \{ \text{مجموعه خروجی های آزمایش تصادفی مورد نظر} \}$$

فضای نمونه های گسسته

مثال: سکه $\quad \Omega = \{\text{خط} , \text{شیر}\}$

مثال: تاس $\quad \Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$

مثال: پرتاب دو سکه $\quad \Omega = \{(\text{شیر}, \text{خط}), (\text{خط}, \text{خط}), (\text{شیر}, \text{شیر}), (\text{خط}, \text{شیر})\}$

سکه اول ، سکه دوم

• پیشامد (outcome):

7743

به هر عضو فضای نمونه یا به هر خروجی آزمایش تصادفی می گوییم.

- واقعه ( event ):

به هر زیرمجموعه فضای نمونه واقعه می گوییم.

مثلا واقعه فرد آمدن در پرتاب تاس

$\updownarrow$

$\{1,3,5\} \subset \{1,\dots,6\}$

- اگر بعد از انجام یک آزمایش تصادفی ببینیم $a_1 \in \Omega$ حالا هر طور و

$a_1 \in A \subset \Omega$. $\longrightarrow$ می گوییم واقعه $A$ رخ داده است.

- نتایج:

واقعه $A \cup B$ اتفاق می افتد $\Longleftrightarrow$ اگر $A$ یا $B$ اتفاق بیافتد (یا هر دو)

واقعه $A \cap B$ " " $\Longleftrightarrow$ اگر $A$ و $B$ اتفاق بیافتند.

7743

اگر $A$ و $B$ دو واقعه متمایز باشند $\Longleftarrow$ اگر $A$ اتفاق بیافتد $B$ اتفاق نیافتاده است.

اگر $A \subset B$ ، اگر $A$ اتفاق بیافتد $\Longleftarrow$ $B$ هم حتما اتفاق افتاده است.

در یک آزمایش تصادفی یا $A$ اتفاق می افتد یا $A^c$.

---