

* ادله بحث ساختن یک مدل برای احتمال

• پارادوکس برتراند

* اصول موضوعه احتمالات

• تعریف میدان گیل (σ -field)

• تعریف تابع احتمال

• خواص تابع احتمال

* تابع احتمال برای فضاهای قابل شمارش

* مثال های از یک میدان گیل

* در مورد ساختن یک مدل برای احتمالات

• اولین قدم: در نظر گرفتن مجموعه های آزمایشی مناسب

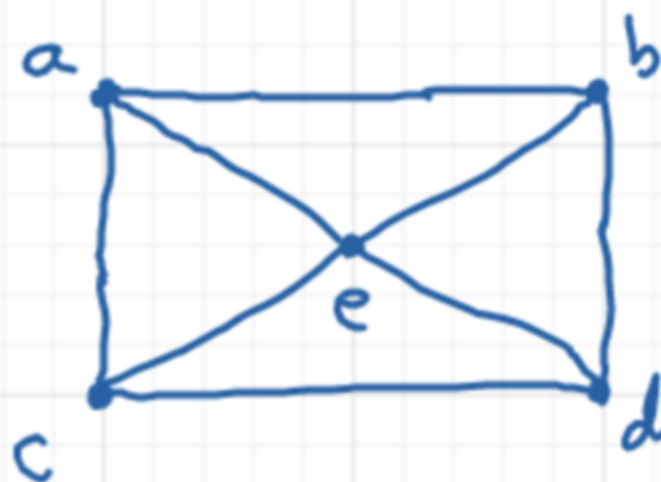
← فضای نمونه (Sample space) : Ω

• پیشامد (outcome) : $a \in \Omega$
 $\uparrow$
 outcome

• واقعه (event) : $A \subseteq \Omega$
 $\uparrow$
 event

• اگر پیشامد آزمایشی صحافی $a \in \Omega$ و $a \in A \Leftrightarrow A$ اتفاق افتاده است.

• مثال: وقتی که یک شکرک به شکل زیر با 8 ضلع بیان داریم.



یک دایره به صورت
 صحافی در شکرک
 حرکت می کند و هم

دقیقه از یک ضلع بیان
 می گذارد. اگر ۱۰ دقیقه را شکرک کند، فضای نمونه این آزمایشی صحافی؟

$$\Omega = \{ \underline{x} \in \{a, b, c, d, e\}^{\mathbb{N}} : (x_n, x_{n+1}) \rightarrow \text{یک قیاس بیابید} \}$$

• بعد از تعیین مفاهیم نمونه $\leftarrow$ احتمال های رخ دادن پیشامدها را مشخص کنیم.

• اگر در مسئله مقارن داشته باشیم (مثلاً تاکي مقارن): سیستم را پاکسلی به هم پیوندها احتمال یکسان نسبت دهیم.

$\leftarrow$ در نتیجه احتمال وقوع یک زیر مجموعه $A \subset \Omega$ برابر است با:

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

ولی اگر مقارن نداشته باشیم این حرف درست نیست.

همچنین در مورد حالت پیوسته، آیا این طریقی خدگه درن معنی دارد؟

در مورد تعریف انتساب یک نقطه در بازه $[a, b]$ به صورت یکنواخت:

[اوه] = سال

uncountable

اگر بخواهیم به ∞ تعداد افعال یکسان ∞ بدیم $\leftarrow$ جمع افعال ∞

$\leftarrow$ به نظری آید برای تعریف افعال برای صفات و صفت‌های بی‌پایان باید دقت کنیم.

به عنوان یک سوال مهم: اصلاً افعال یکپارچه در باره [اوه] یعنی چه؟

یک مشکل دیگر در استفاده از راجد $\frac{|A|}{|A|}$ این است که ممکن است با مجموعه‌های ∞ اندازه‌ای مواجه باشیم.

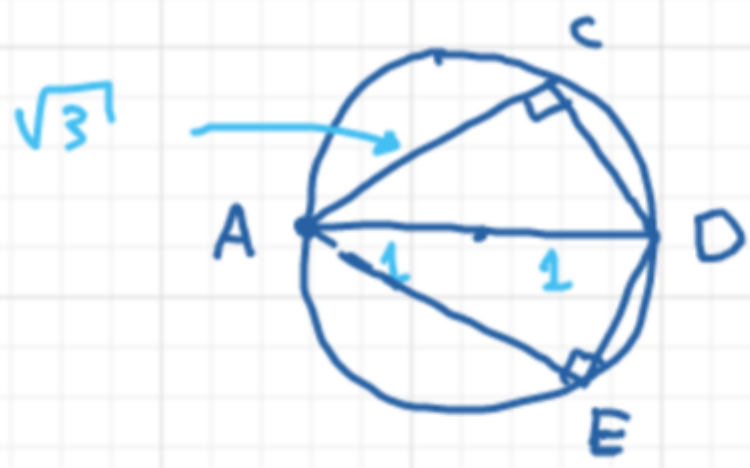
$\leftarrow$ این در راستای توان با جایگزینی که آن اندازه مجموعه‌ها با طول و مساحت و حجم و مانند آن حل کرد.

ولی کلاً حرف ما این است که راجد $\frac{|A|}{|A|}$ برای تعریف افعال کافی نیست.

* بارادوکسی برتراند:

مسئله: در یک دایره به شعاع یک یک وتر را به صورت کلاً تصادفی انتخاب می‌کنیم.

افتال اینکه طول این وتر از $\sqrt{3}$ بیشتر باشد چقدر است!



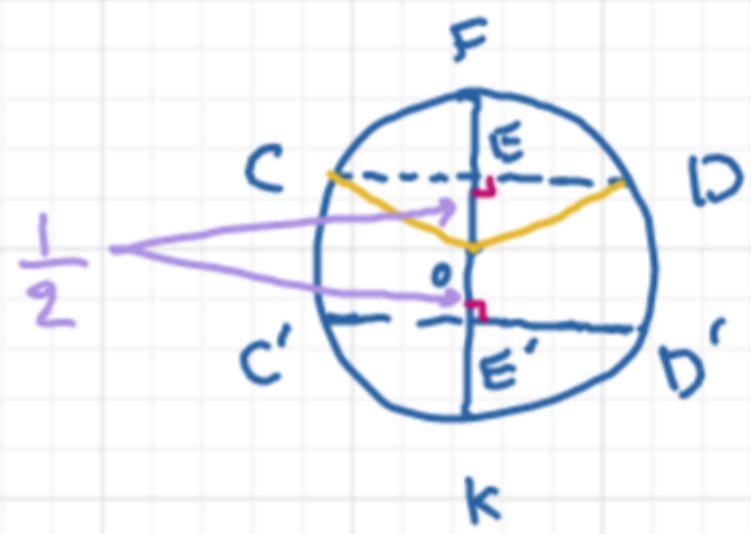
① راه اول:

$$\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EAD = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow P[\sqrt{3} \leq \text{طول وتر}] = \frac{\widehat{EDC}}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

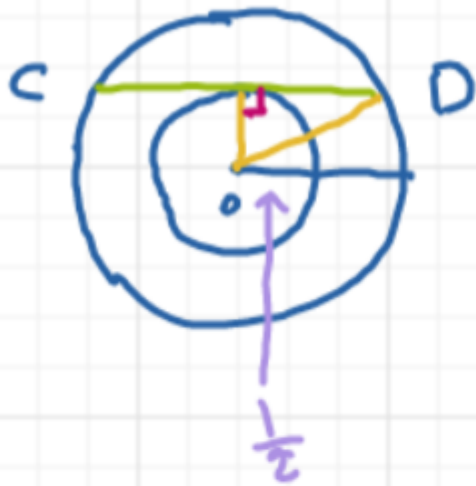


② راه دوم:

$$OE = OE' = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = C'D' = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P[\sqrt{3} \leq \text{طول وتر}] = \frac{EE'}{FK} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

③ راه سوم:



$$\Rightarrow CD = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P[\sqrt{3} \leq \text{طول وتر}] = \frac{\text{مساحت دایره داخلی}}{\text{مساحت دایره اصلی}}$$

$$= \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi (1)^2} = \frac{1}{4}$$

هر که پاسخ به تنوی درست هستند ولی پاسخ های مسائل مختلفی هستند.

نکته مهم: نحوه انتخاب وترها در این که روش متفاوت است!

لکه درس: پس باید دقت مواضع و آزادی مقایسه مان را

دقیق رعایت کنیم.

یعنی صرف اینکه بگوییم و نه مان را به هر ترتیبی نوشتیم اشتباه است.
و نکته کافی نیست...

به صفحه ویکی پدیای پارادوکس مراجعه کنید.

نکته: مفهومی نمونه در هر که آزمایشی کلیان است.

* اصول موضوعه احتمالات:

• تلاش کردیم افعال را به پیشامدها منتسب بدیم (با توجه به شکل و مان از حالت گسسته)

ولی شکست خوردیم!

• مثال تعریف افعال میگویند به بازه $[a, b]$ به طور شهودی افعالی که در

بازه $[a, b] \subseteq [0, 1]$ یا ضمیمه برابر است با:

$$P[\text{خردی در بازه } [a, b]] = \frac{b-a}{1-0} = b-a$$

طول بازه

دقت کنید که یازده [ad] یک واقعه (event) است.

نتایج یک راه برای تخریب افعال: به جای اینکه افعال را به پیشوندها نسبت دهیم به
و نتایج نسبت دهیم.

سوال: اگر قبول کنیم افعال را یا به نتایج و یا به آیات به نتایج (یعنی
هم زیر مجموعه های مضای نمونه) می شود افعال نسبت داد؟

مثلا می توان به زیر مجموعه اعداد گویا یا گنگ موجود در یازده [ad] = ۱۰
افعال نسبت داد؟

به صورت خاصی در مورد زیر مجموعه گویا و گنگ می شود به اب داد.

ولی زیر مجموعه های (و نتایج) از مضای نمونه وجود دارند که نمی توان
برای آنها افعال تخریب کرد!!!

• در نتیجه اصول موضوعه امثال است بیان می کند که برای یک مجموعه فکر از زیر

مجموعه های مضای نمونه می توان افعال تخریب کرد (ولی نه لزوماً هم زیر مجموعه های

۱) . به بیان دیگر $\mathcal{F}$ مجموعه وقایع به درج اول یا دوم خوب و ...

• مجموعه $\mathcal{F}$ (میدان سگیدا یا σ -field) :

بسیار فاکتور مجموعه غیر تهی از زیر مجموعه های Ω است که :

$$\textcircled{1} \quad \text{If } A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{If } A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

$$\textcircled{2'} \quad (\text{closed under Countable union})$$

$$\text{If } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow (A_1 \cup A_2 \dots) \in \mathcal{F}$$

• نتایج :

$$\text{If } A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

①

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{F} \quad \text{پس:}$$

$$\Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \quad \checkmark$$

$$\Omega \in \mathcal{F}, \quad \emptyset \in \mathcal{F} \quad \text{داریم:} \quad \textcircled{2}$$

$$\mathcal{F} \text{ is non-empty} \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F} \quad \text{پس:}$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cup A^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F} \\ A \cap A^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F} \end{cases}$$

تا الان توضیح داده ایم که به چه موجوداتی افتال نسبت می دهیم.
حال باید تا به افتالی که به آنها افتال نسبت می دهد راهه شریف کنیم.

$$\mathbb{P}: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

• تعریف تابع احتمال:

که خواص زیر را دارد:

$$\textcircled{1} \quad \forall A \in \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}[A] \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{P}[\Omega] = 1$$

$$\textcircled{3} \quad \text{If } A \cap B = \emptyset \text{ \& } A, B \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

$\textcircled{3'}$ Countable disjoint set:

$$\text{If } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ \& } A_i \cap A_j = \emptyset : \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$$

• به تقویت میان گیری به همراه تفریح تا به اقبال اصول و محتوای افتخارات و نویسم
