

* ادامه بحث اصول موضوعه احتمالات

• خواص تابع احتمال

• مثال هایی از یک میدان گسسته

* تابع احتمال برای فضاهای قابل شمارش

* چند مثال از نحوه محاسبه احتمال و نتایج

* مروری بر نتایج

• اصل جمع

• اصل ضرب

• چند مثال

• تناظر یک به یک

• چند مثال

• احتمال دایم "غیر ممکن" $\emptyset$ صفر است.

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{مثال عدد} \Rightarrow \underbrace{P[A \cup \emptyset]}_{=A} = P[A] + P[\emptyset]$$

$$\Rightarrow P[A] = P[A] + P[\emptyset] \Rightarrow P[\emptyset] = 0 \quad \checkmark$$

• برای هر دایم $A \in \mathcal{F}$ داریم: $P[A] + P[A^c] = 1$

$$A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow \underbrace{P[A \cup A^c]}_{=1} = P[A] + P[A^c]$$

$$\Rightarrow P[A] + P[A^c] = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P[A] = 1 - P[A^c] \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq P[A] \leq 1$$

• برای هر دو واقعه دلخواه $A, B \in \mathcal{F}$ داریم:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

حالت دو نای متاخر و عدم تداخل (inclusion-exclusion lemma)

اثبات: $A \cup B = \Omega \cap (A \cup B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B)$

$$= A \cup (A^c \cap B)$$

و متناهی کنیم: $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$

$$\Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[A^c \cap B] \quad (1)$$

از طرف دیگر: $B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

و متناهی کنیم: $(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$

$$\Rightarrow P[B] = P[A \cap B] + P[A^c \cap B] \quad (2)$$

①, ② $\Rightarrow$ ✓

اگر $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{F}$ آنگاه: $P[B] \leq P[A]$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \quad \text{ایست:}$$

$$= B \cup (A \cap B^c)$$

$$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset \quad \text{و دسته‌های گسسته:}$$

$$\Rightarrow P[A] = P[B] + \underbrace{P[A \cap B^c]}_{\geq 0} \Rightarrow P[A] \geq P[B] \quad \checkmark$$

* مثال‌های اثر وسیع‌تری گویا،

• مثال‌ها: فضای نمونه Ω — {خط و شبر} $\mathcal{F}$

ساده‌ترین و به درد فوشرین میدان گویا برای هر آزمایشی مقابلی:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

غیر از این برای مثال سکه‌ی توانیم سیل، خیار، زیر را در خط بگیریم:

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{\text{سیر}\}, \{\text{خط}\}, \Omega \} = 2^{\Omega}$$

برای سکه غیر از $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}$ میدان گیاهی دیگری نداریم.

$$\{ \text{سیر} \} = \{ \text{خط} \}^c \Rightarrow P[\{ \text{سیر} \}] = 1 - P[\{ \text{خط} \}] = p$$

که $0 \leq p \leq 1$ و p به اطلاعات لازم برای مدل کردن آزمایشی متغیری
به تاب یک سکه را فراهم می‌کند.

• مثال به تاب یک تاس

کوچکترین میدان گیاهی که شامل $\{1, 3, 5\}$ باشد کدام است؟
واقعاً در آید

$$\text{If } \{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}' \Rightarrow \{1, 3, 5\}^c \in \mathcal{F}' \Rightarrow \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}'$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega \}$$

لبنه میان گیاهی پرتاب شده. یعنی خود و زوج آمدن لبنه نیز حفظ آمدن شده.

از طرف دیگر محدودیت برای پرتاب تاکی میان گیاهی را در مقدار دیگری که شامل همه زیر مجموعه های فضای نمونه $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ باشد؛

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \{5, 6\}, \dots, \Omega \} = 2^{\Omega}$$

محدودیتی در مورد پرتاب تاکی صحبت نمیکنیم یا میان $\mathcal{F}$ سر و کار داریم.

* نتایج افعال برای فضاهای قابل شمارش (Countable):

• اگر Ω یک فضای نمونه n عضو باشد: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

می توانیم میان گیاهی $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ را انتخاب کنیم.

در نتیجه افعال هم و نتایج برای توان به سبب افعال پیشوندها (و عایج ساره یا

و نتایج تک تک مفوی بیان کرد.

یعنی برای هر واقعه $A \in \mathcal{F}$ که به صورت زیر است:

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}, \quad i_1, \dots, i_k \in [1:n]$$

$$= \{\omega_{i_1}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$$

disjoint sets

و نتایج تک تک مفوی به نتایج ساده

$$\begin{aligned} \Rightarrow P[A] &= P[\{\omega_{i_1}\}] + \dots + P[\{\omega_{i_k}\}] = \\ &= P_{i_1} + \dots + P_{i_k} \end{aligned}$$

با فرض اینکه:

$$P[\{\omega_j\}] = P_j$$

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}$$

و چون

$$1 = P[\Omega] = P_1 + \dots + P_n$$

$$P[\{\omega_j\}] \geq 0 \Rightarrow P_j \geq 0$$

و همچنین داریم

یعنی در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه n عضوی مشخص کردن

$$P_1, \dots, P_n \text{ به همراه شرط های } P_j \geq 0 \text{ و } P_1 + \dots + P_n = 1$$

کل مدل احتمالاتی ما را مشخص می کند.

(در واقع به علت وجود قیود $\sum P_i = 1$ عملاً متغیر $n-1$ پارامتر برای مشخص کردن

مدل نیاز داریم).

مثلاً: تاکنون همه حرف های بالا را با فرض $n = |\Omega|$ ردیم. ولی همه حرف های

دستی که در تابلوی بی شمارا عضو داشته باشند هم کار می کند.

* مثال: دو تکی متقارن را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه جمع در عدد آمده کمتر از ۷ باشد چقدر است؟

تکی دوم
↓
تکی اول

ابتدا فضای نمونه این آزمایش را بنویسیم:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\} \Rightarrow |\Omega| = 36$$

واقعیه مربوط به اینکه جمع دو تکی کمتر از ۷ شود:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\} \Rightarrow |A| = 6$$

$$P[\{(i,j)\}] = \frac{1}{36} \quad \leftarrow \text{فرض کردیم که دو تکی با هم متقارن هستند}$$

$$\forall i, j \in [1:6]$$

$$\Rightarrow P[A] = P[\{(1,1)\}] + P[\{(1,2)\}] + \dots + P[\{(3,1)\}]$$

$$= 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

به علت تقارن $\rightarrow$
$$= \frac{|A|}{|A|} = \frac{6}{36} \quad \checkmark$$

• وقتی در مسئله تقارن داریم به خطای آیه گزارش تعداد اصفای مجموعه ها به کار
بیاور!
