92-9669

آمار و احتمال مهندسی، جلسه 5: دوشنبه 9 اسفند ۱۴۰۰

---

* مروری بر اصول موضوعه احتمالات

* یک مثال از نحوه محاسبه احتمال وقایع

* مروری بر شمارش

  . اصل جمع و اصل ضرب

  . چند مثال

  . تناظر یک به یک

  . چند مثال

* مقدمه‌ای بر مفهوم استقلال و وابستگی بین وقایع

* تعریف احتمال شرطی

---

* مرور اصول موضوعه احتمالات:

  . احتمال را برای وقایع (زیرمجموعه‌های فضای نمونه) تعریف می‌کنیم.

• به همه وقایع نمی‌توان احتمال نسبت داد. فقط به وقایع خوب یا بهتر بگوییم احتمال نسبت می‌دهیم:

این وقایع توسط میدان سیگما تعریف می‌شوند:

میدان سیگمای $\mathcal{F}$ یک مجموعه غیرتهی از زیرمجموعه‌های Ω که:

① If $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

② If $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow (A_1 \cup A_2 \dots) \in \mathcal{F}$

• با تابع احتمال $\mathbb{P}$ به وقایع احتمال نسبت می‌دهیم:

$$\mathbb{P}: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

که خواص زیر را دارد:

① $\forall A \in \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}[A] \geq 0$

② $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

③ If $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cdots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \cdots$$

---

* مثال: دو نفر به نوبت یک سکه متقارن را پرتاب می‌کنند.

نفر اولی که شیر بیاورد بازی را می‌برد.

احتمال برد نفر اول چقدر است؟

حل: ابتدا فضای نمونه را می‌نویسیم:

$\Omega = \{$ (شیر) , (خط , شیر) , (خط , خط , شیر) , (خط , خط , خط , شیر) , ... $\}$

نفر اول   نفر دوم   نفر اول

واقعه برد نفر اول:

$A_1 = \{$ (شیر) , (خط , خط , شیر) , (خ , خ , خ , خ , ش) , ... $\} \subset \Omega$

$= \{$(شیر)$\} \cup \{$(خ , خ , ش)$\} \cup \{$(خ , خ , خ , خ , ش)$\} \cup \cdots$

92-9669

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[\{(\text{شیر})\}] + \mathbb{P}[\{(\text{خط}, \text{خط}, \text{شیر})\}] + \mathbb{P}[\{(\text{خط}, \text{خط}, \text{خط}, \text{خط}, \text{شیر})\}] + \cdots$$

با استفاده از خاصیت 3

یک سری وقایع متمایز دو به دو را

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{2}{3}$$

• راه حل دوم:

فرض کنید احتمال برد نفر اول P باشد:

پرتاب اول:
- با احتمال $\frac{1}{2}$ ⟵ شیر ⟵ برد نفر اول
- با احتمال $\frac{1}{2}$ ⟵ خط ⟵ حال انگار نفر دوم شد نفر اول ⟵ احتمال برد نفر دوم در این حالت $= P$

$\Leftarrow$ احتمال برد نفر اول $= 1-P$

احتمال برد نفر اول

$$\Rightarrow P = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{سکه اول شیر}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1-P)}_{\text{سکه اول خط}}$$

$\frac{1}{2}$ ⟵ احتمال خط آمدن سکه اول

$\frac{1}{2}$ ⟵ احتمال شیر آمدن سکه اول

$$\Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

* شمارش:

• در بعضی از مسائل احتمالاتی به شمارش نیاز با دقت اشکال و تمایز نیاز دارد.

• در حالت کلی شمارش اعضای یک مجموعه می تواند خیلی سخت باشد.

• ولی در بسیاری موارد اصل جمع و اصل ضرب کمک می کند.

• اصل جمع: اگر کاری را به m طریق و کار دیگری را به n طریق انجام دهیم و اگر این دو کار را نتوان به صورت همزمان انجام داد، آنگاه این یا آن کار را می توان به m+n طریق انجام داد.

به بیان دیگر:

$$|S_1 \cup \dots \cup S_n| = |S_1| \cup \dots \cup |S_n|$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset , \forall i \neq j$$

• اصل ضرب: اگر کاری را بتوان به m طریق و کار دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، آنگاه هر دو کار را همزمان می توان به mn طریق انجام داد.

به بیان دیگر با زبان شمارش مجموعه‌ها:

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n|$$

---

* مثال: جایگشت n شی متمایز چند حالت دارد

با استفاده از اصل ضرب

# انتخاب	n	$n-1$	$n-2$	....	2	1
	مکان اول	مکان دوم	مکان سوم		مکان n-1	مکان n

$$\Rightarrow \text{تعداد کل انتخاب‌ها} = n!$$

* انتخاب K شی از n شی متمایز:

$$\text{تعداد کل انتخاب‌ها} = n \times (n-1) \times \dots (n-k+1)$$

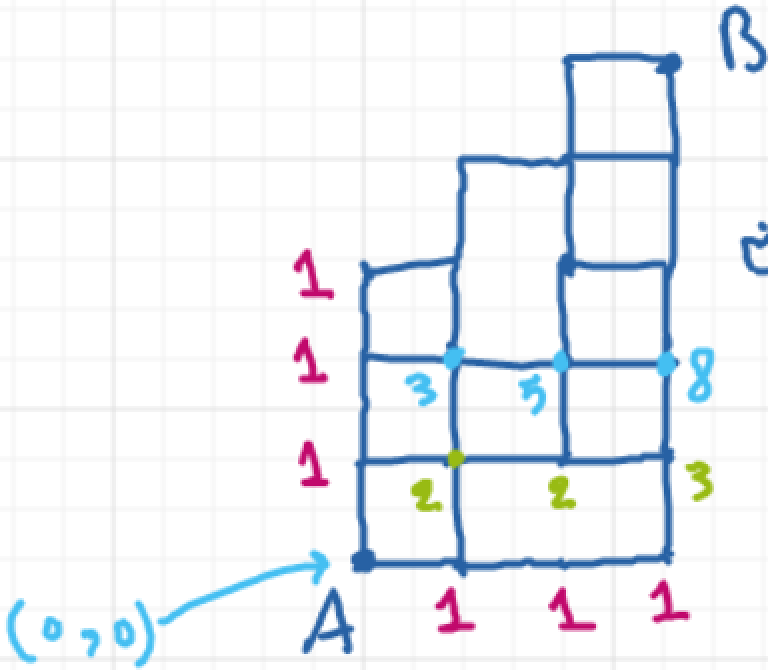
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

با این روش ترتیب انتخاب‌ها هم مهم است

اگر برای ما ترتیب اشیا مهم نباشد عبارت بالا را بر k! تقسیم می‌کنیم (تعداد جایگشت‌های k عضوی):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

در این حالت ترتیب مهم نیست

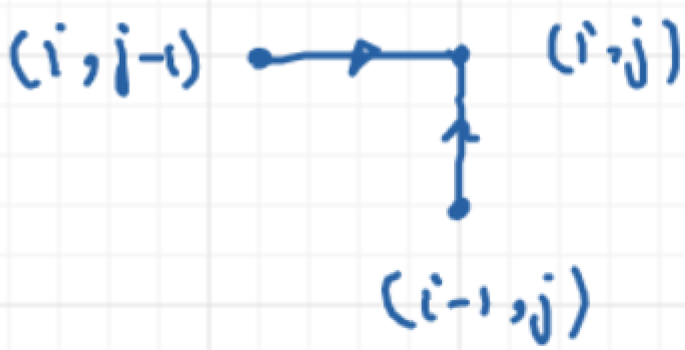


* مثال: تعداد راه‌های ممکن از A به B

چقدر است با فرض اینکه فقط به راست و یا بالا حرکت کنیم

$a(i,j) =$ تعداد مسیرها از A تا نقطه (i,j)

با استفاده از اصل جمع یک رابطه بازگشتی برای $a(i,j)$



* مثال: رابطه انتخاب k شی از n شی را با اصل جمع بدست بیاورید:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

سعی می‌کنیم با اصل جمع یک رابطه بازگشتی بدست بیاوریم.

یک عضو خاص x از مجموعه n شی را در نظر بگیرید:

هر بار که k شی را انتخاب می‌کنیم:

x جزو k شی نیست: باید k شی را از $n-1$ شی انتخاب کنیم ← $\binom{n-1}{k}$

x جزو k شی هست: باید $k-1$ شی را از $n-1$ شی انتخاب کنیم ← $\binom{n-1}{k-1}$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} \underset{\text{اصل جمع}}{=} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

: به رابطه پاسکال مشهور است

حال برای اثبات رابطه اصلی از استقراء استفاده می کنیم.

فرض می کنیم که $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{(m-k)!\,k!}$ برای همه $m<n$

و بعد نشان می دهیم رابطه برای n هم برقرار است.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}$$

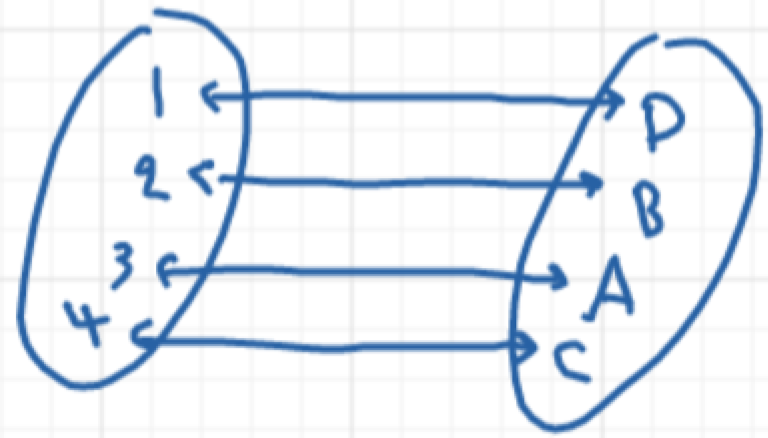
$$= (n-1)!\left[\frac{k}{(n-k)!\,k!} + \frac{n-k}{(n-k)!\,k!}\right] \checkmark$$

---

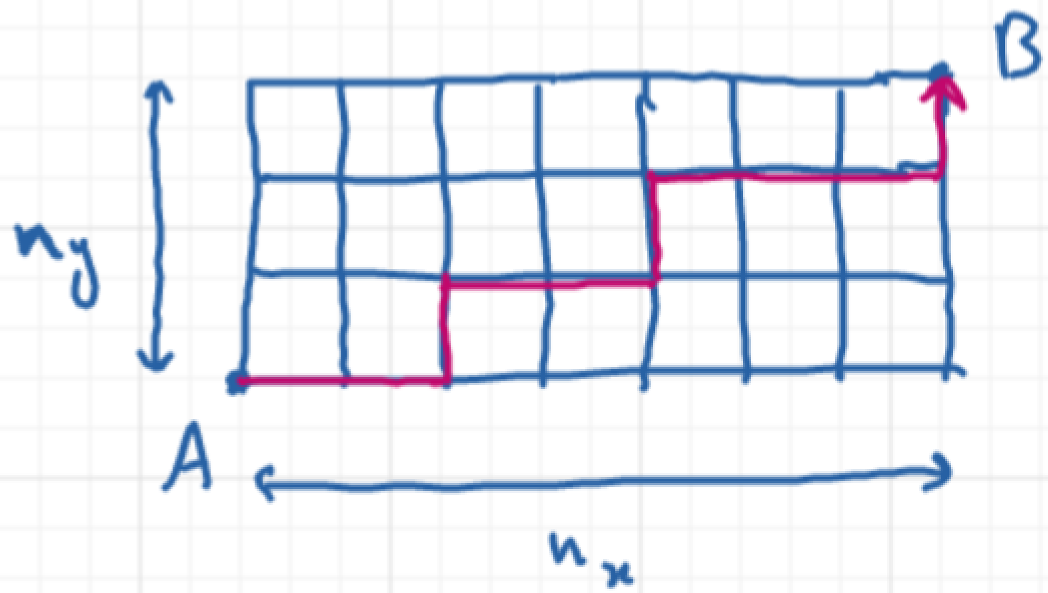
* راه دیگر برای شمارش ← تناظر یک به یک

تناظر یک به یک به اعضای دو مجموعه ← هر عضو از مجموعه اول متناظر و منتقل به یک عضو از مجموعه دوم نگاشته شود.

⇐ تعداد اعضای این دو مجموعه یکسان



* مثال: در شکل زیر تعداد راه‌های رسیدن از A به B چندتا است اگر فقط به راست و بالا حرکت کنیم:



هر راهی از A به B متناظر است با یک دنباله به طول n_x+n_y از R و U

مسیر قرمز $\longleftrightarrow$ RRURRURRRU

$\Leftarrow$ تعداد مسیرها از A به B تعداد دنباله‌های مختلف به طول n_x+n_y از دو

کاراکتر R و U

$$\Rightarrow \quad = \binom{n_x+n_y}{n_x} = \binom{n_x+n_y}{n_y} = \frac{(n_x+n_y)!}{n_x!\, n_y!} \quad \checkmark$$