

آمار، احتمال و هندسی، جلسه 8: شنبه 21 آگست 1400

* نتایج دو به دو مستقل و نتایج مشترکاً مستقل

* استقلال آزمایشی معادل تقاضای

* بررسی n آزمایشی تقاضای مستقل لزوم

* چند مثال

* مرور: استقلال دو واقعه $A, B \in \mathcal{F}$

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

$$\iff P[B|A] = P[B]$$

$P[A] \neq 0$

* ادامه مثال دفعه قبل: درگاه

$$X: \begin{cases} 0 & : \text{اتصال} \\ 1 & : \text{اتصال} \end{cases}$$

P $1-P$

$$Y: \begin{cases} 0 & : & \frac{1}{2} \\ 1 & : & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = X \oplus Y$$

مثلاً: $A_0 \perp C_0$ و ...

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \{X=0\} & \{Z=0\} \end{array}$$

* نتایج دوبه دو مستقل و نتایج مشترک مستقل:

• در مثال قبلی فرض کنید $P = \frac{1}{2}$ ← می توان نشان داد:

$$\begin{cases} B_0 \perp C_0 \\ B_0 \perp C_1 \\ B_1 \perp C_0 \\ B_1 \perp C_1 \end{cases}$$

با فرض $P = \frac{1}{2}$

مثلاً نتایج A_0, B_0, C_0 دوبه دو مستقل هستند، یعنی

$$A_0 \perp B_0, A_0 \perp C_0, B_0 \perp C_0$$

ولی مثلا $A_0 \not\perp (B_0 \cap C_0)$

$$\{X=0\} \Leftarrow \{Y=0\} \quad \{Z=0\}$$

* وقایع مشترک مستقل:

~ واقع A, B, C را مشترک مستقل می گویند اگر آنکه هر دو مستقل باشند و همچنین

$$P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$$

• برای تعداد n واقع $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ اگر داشته باشیم:

$$\forall S \subseteq [1:n] \Rightarrow P\left[\bigcap_{i \in S} A_i\right] = \prod_{i \in S} P[A_i]$$

می گویند وقایع $A_1, \dots, A_n$ مشترک مستقل هستند.

نکته: اگر A_1, A_2, A_3 مشترک مستقل باشند آنگاه:

① $A_1 \perp (A_2 \cap A_3)$, $A_2 \perp (A_1 \cap A_3)$, ...

② A_1, A_2^c و A_3^c مشترک مستقل هستند و ترکیب هارمونی به این.

③ $A_1 \perp (A_2 \cup A_3)$, ...

هرامیه کنید به ص 38, 39 کتاب چاپ اولی.

* نکته: اگر دو رویداد A, B که $P[A] \neq 0$ و $P[B] \neq 0$ آنگاه اگر $A \perp B$ آنگاه و
 A, B از نظر احتمال فیزیکی دارند. زیرا:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

* استقلال دو آزمایشی متناهی:

تا الان استقلال را برای رویدادهای متناهی تعریف کردیم.

گاهی در آزمایش صفاتی داریم مثل پرتاب یک تاس و یک کله که به فضای آید و وابستگی ای به هم ندارند. این مسئله را چطور تعریف کنیم؟

مشکل اینجاست که در آزمایش صفاتی نمونه جدا از هم دارند و نمی توان از تعریف قبلی استقلال بین نتایج استفاده کرد.

برای حل این مشکل: یک آزمایش صفاتی بزرگتر تعریف می کنیم که شامل هر دو آزمایش صفاتی مایا کرد. این کار را به صورت ایجابی دهیم:

→ فضای نمونه

آزمایش

توان

(Combined experiment)

↑
وابستگی

در این صورت اگر $A \subseteq \Omega_1$ و $B \subseteq \Omega_2$ ($A \in \mathcal{F}_1$ و $B \in \mathcal{F}_2$) آنگاه

میان نگاشته ای آزمایشی جدید $\leftarrow A \times B \in \mathcal{F}$, $A \times B \subseteq \Omega$

• دو واقعه $(A \times \Omega_2)$ و $(\Omega_1 \times B)$ را در آزمایشی جدا جدا در نظر بگیریم.

که در آزمایشی دوم B اتفاق می افتد یا در Ω_1 اتفاق می افتد که در Ω_1 اتفاق می افتد.

که یعنی واقعه A در آزمایشی اول اتفاق می افتد مستقل از اینکه که در Ω_2 اتفاق می افتد.

آزمایشی دو جدا جدا.

$$P[A \times \Omega_2] = P_1[A] \quad \text{پس می توانیم بگوییم:}$$

$$P[\Omega_1 \times B] = P_2[B]$$

• برای اینکه آزمایشی توانان مان کامل شود باید به هم و تقاطع به شکل $A \times B$ (و اشتراک و اجتماع) استقلال مثبت دهیم.

• در صورت استقلال دو آزمایشی می توانی:

$$A \times B = (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)$$

استقلال دو آزمایشی $\Rightarrow$

$$P[A \times B] = P[(A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)]$$

$$= P[A \times \Omega_1] \cdot P[\Omega_1 \times B]$$

$$= P_1[A] \cdot P_2[B]$$

این را $\longleftrightarrow$

به عنوان شرط آزمایشی های قراردادی مستقل در نظر می گیریم.

و توان نشان داد که $P[A \times B] = P_1[A] \cdot P_2[B]$ برای هر $A \in \mathcal{F}_1$ و $B \in \mathcal{F}_2$

افعال و نتایج به شکل $A \times B$ و ایماج در اکثر آن نشان را در آزمایشی توان منصفی و کند.

$\Leftarrow$ دل اقلاتی کامل است.

به سی 4 تا 5 کتاب با پرلین نگاه کنید.

نکته: داریم یا ترکیب کردن آزمایشی های ساده، آزمایشی های پیچیده تر می سازیم.

* تعداد بار وقوع واقعه A در n آزمایش مستقل از هم

• فرض: یک آزمایش مستقل با فضای نمونه Ω داریم که $A \in \mathcal{F}$ با احتمال P رخ دهد.

$$P[A] = P \Rightarrow P[A^c] = 1 - P$$

این آزمایش را به صورت مستقل n بار تکراری کنیم:

$$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_n$$

و $P_n(k)$ برابر باشد با احتمال وقوع k بار واقعه A در این n آزمایش.

سوال: $P_n(k) = ?$

پاسخ: ابتدا ظاهر شدن k بار A با یک ترتیب خاص:

$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$: نتایج قوی «بار i »

$$\uparrow A \subseteq A^c \subseteq A$$

احتمال ظاهر شدن یک ترکیب خاص :

و $\binom{n}{k}$ ترکیب مختلف داریم :

$$\Rightarrow P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

مثال: یک زوج تاس را n بار به صورت مستقل پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد 7 حداقل یک بار در این n آزمایش ظاهر شود؟

$$A = \{ \text{احتمال ظاهر شدن 7} \} = \{ (1,6), \dots, (6,1) \}$$

$$\Rightarrow P[A] = \frac{1}{6} = p$$

$$P[7 \text{ هیچگاه در ۸۵ سالگی}] = 1 - P[\text{حداقل یکبار در ۸۵ سالگی}]$$

قانون شتور

$$= 1 - P_n(0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

* مثال: فرض کنید دوستی و رنجور داریم ← ستون جدولی: 5% متقاضی خاصی برپا دارند.

ستون کیب ← 98% متقاضی خاصی دارند

← 1% رنجورها کیب هستند.

سوال: اگر رنجوری متقاضی خاصی برپا داشته باشد احتمال کیب چیست؟

$A = \{\text{مشاهده متقاضی خاصی}\}$ و $B = \{\text{کیب بودن رنجور}\}$

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B] \cdot P[B]}{P[A \cap B]} = P[A \cap B]$$

$$\underline{P[A|B] \cdot P[B] + P[A|B^c] \cdot P[B^c]} \\ = P[A]$$

$$= \frac{0.98 \times 0.01}{0.98 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} \approx 0.165$$

• چهارستان مرده نفش اقل کیه ب چون از ۱٪ به ۱۶.۵٪ افزایش پیدا می کند ولی همیشه این اقل کم است.

* مثال: مسابقه پاک در



در یک مسابقه سه در است.

به صورت متادنی بیت دو در است

و بیت یک در ماکس است.

شما یک در را انتخاب می کنید. میوی یکی از دو در دیگر را بازی کند.

دائرهای دیگر که می‌خواهید عوضی کنید انتخاب را بزنید ؟
که اسم کار به سفارش است ؟