4801-4726

---

* مثال (مسابقه سه در)
* متغیرهای تصادفی (Random variables)
  - مقدمه
  - تعریف متغیر تصادفی
  - معرفی برخی متغیرهای تصادفی (متغیر تصادفی ثابت، متغیر تصادفی برنولی
    متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای، متغیر تصادفی
    پواسن)

---

* مثال (مسئله سه در)

فرض کنید در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده‌اید و قرار است از بین سه در یکی را انتخاب کنید. به طور کاملا تصادفی پشت یکی از درها یک ماشین قرار داده شده است و پشت دو در دیگر در عدد بز قرار دارد.

جایزه شما پشت همان درب قرار دارد که آن را باز می‌کنید.

8801-4726 سپس از انتخاب شما، مسئول مسابقه که می داند پشت درها چه قرار دارد، یکی از دو در دیگر را که پشت آن بز قرار دارد باز می کند.

سپس از شما می پرسد که آیا می خواهید انتخاب خود را تغییر دهید یا عوض کنید.

از نظر احتمالاتی چه کاری احتمال برد شما را بیشتر می کند؟

حل:

بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید شما در ابتدا 1 را انتخاب کرده باشید.

می دانیم که: $P[C \text{ in } 1] = \frac{1}{3}$

سپس مسئول مسابقه یکی از دو در دیگر را برای شما باز می کند (مثلا در شماره 3 را).

در این صورت علاقمند هستیم احتمال

$$P[C \text{ in } 1 \mid 3 \text{ is opened}]$$

را محاسبه کنیم.

$$P[\underbrace{C \text{ in } 1}_{I} \mid \underbrace{3 \text{ is opened}}_{A}] = \frac{P[3 \text{ is opened} \mid C \text{ in } 1] \cdot P[C \text{ in } 1]}{P[\underbrace{3 \text{ is opened}}_{A} \mid \underbrace{C \text{ in } 1}_{I}] \cdot P[C \text{ in } 1] + P[\underbrace{3 \text{ is opened}}_{A} \mid \underbrace{C \text{ in } 2}_{3}] \cdot P[C \text{ in } 2] +}$$

01-4726

$$P[\underbrace{3 \text{ is opened}}_{A} \mid \underbrace{C \text{ in } 2}_{J}] \cdot P[C \text{ in } 2] +$$
$$P[\underbrace{3 \text{ is opened}}_{A} \mid \underbrace{C \text{ in } 3}_{K}] \cdot P[C \text{ in } 3]$$

$$P[A|I] = \frac{1}{2} \quad \& \quad P[A|J] = 1 \quad \& \quad P[A|K] = 0$$

$$\Rightarrow P[C \text{ in } 1 \mid 3 \text{ is opened}] = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = P[C \text{ in } 1]$$

از طرفی به طور مشابه داریم:

$$P[C \text{ in } 2 \mid 3 \text{ is opened}] = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

از نظر شهودی:

ببینیم درجه عالقی عوض کردن به نفع ما و درجه عالقی به ضرر ما است.

اگر انتخاب اولیه‌مان یکی از بزها باشد با عوض کردن در خواهیم برد.

301-4726

ولی اگر انتخاب اولیه ما ماشین باکلاه باشد عوض کردن می بازیم.

حال احتمال اینکه انتخاب اولیه ما بز باشد دو برابر این است که ماشین باکلاه را با احتمال $\frac{1}{3}$ ماشین و با احتمال $\frac{2}{3}$ بز انتخاب می کنیم).

مثال دقیق تر:

حالت های ممکن در این آزمایش:

در:

1	2	3		
C	G	G	$\rightarrow X$	$P[X]=\frac{1}{3}$
G	C	G	$\rightarrow Y$	$P[Y]=\frac{1}{3}$
G	G	C	$\rightarrow Z$	$P[Z]=\frac{1}{3}$

$P[\text{بردن بشرط عقویتی} \mid X] = 0$

$P[\text{بردن بشرط عقویتی} \mid Y] = 1$

$P[\text{بردن بشرط عقویتی} \mid Z] = 1$

عامده احتمال کل

$\Rightarrow P[\text{بردن بشرط عقویتی}] = P[\text{بردن بشرط عقویتی} \mid X] \cdot P[X] +$

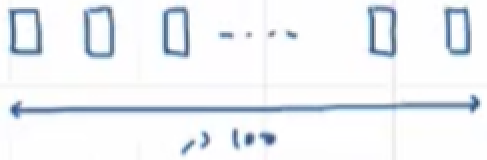
$P[\text{برنده شدن با تعویض} \mid Y] \cdot P[Y] +$

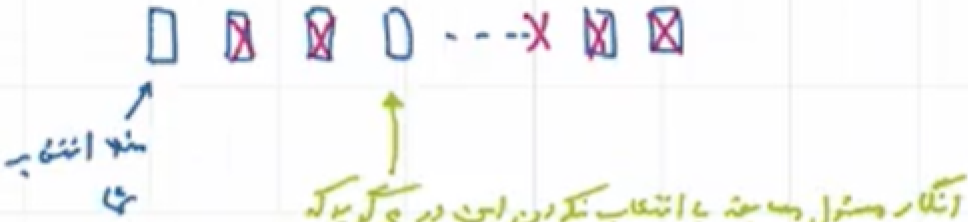
$P[\text{برنده شدن با تعویض} \mid Z] \cdot P[Z]$

$= \frac{2}{3}$

یک استدلال شهودی دیگر:

فرض کنید به جای 3 در مثلا ۱۰۰ در داشته باشیم. و مسئول مسابقه 98 در را باز می‌کند.





(این اکتیویتی فقط به اتاق 4 درصد کار می‌کند).

8801-4726

* متغیرهای تصادفی (Random Variables) :

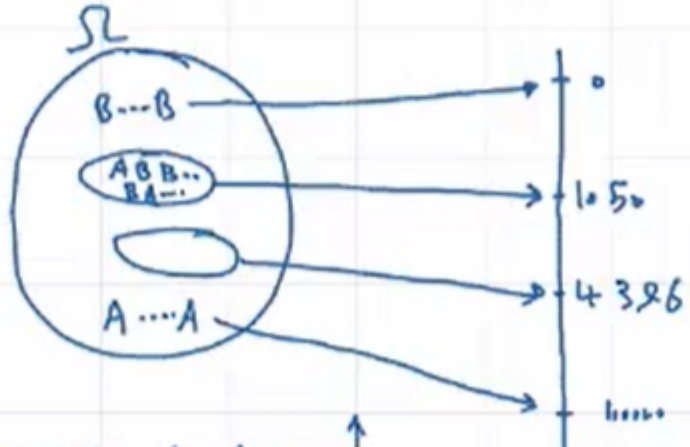
• مثال انتقال بیت با ۱۰۰۰۰۰ شرکت‌کننده در کلاس

فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی :

$$\Omega = \{ \underbrace{(A, \cdots, A)}_{100k} , \cdots\cdots\cdots , \underbrace{(B, \cdots, B)}_{100k} \}$$

$$|\Omega| = 2^{100000}$$

کار کردن با خود فضای Ω راحت نیست . ولی با نگاشت به اعداد حالای A پیدا می‌کنیم :



تابع یا mapping ← متغیر تصادفی

تعداد ۲ برای A

اسمای

به شعوی رشته های فضای نمونه را اندازه گیری

می کند.

• تعریف متغیر تصادفی:

متغیر تصادفی یک تابع است از فضای نمونه به اعداد حقیقی:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

معمولا متغیر تصادفی را با حرف بزرگ نشان میدهیم.

• برای فضای نمونه گسسته ← می‌توانیم به صورت کلی آن را بیان کنیم (با فضای Ω)

احتمال مثبت دهیم:

$$P[X = k] = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega)=k} P[\{\omega\}]$$

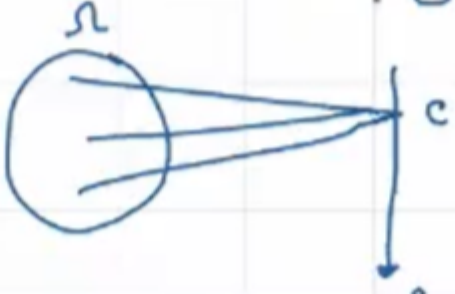
↑ حرف کوچک (مقداری که متغیر تصادفی به خود می‌گیرد)

(این فرمول برای فضاهای نمونه پیوسته صحیح نیست).

* چند مثال از متغیرهای تصادفی ساده:

• متغیر تصادفی ثابت:

$$\forall \omega \in \Omega : X(\omega) = C$$



4726

$\mathbb{R}$

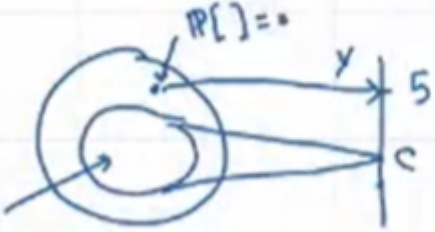
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}[X = c] = 1 \\ \mathbb{P}[X = k] = 0 \quad \text{if } k \neq c \end{cases}$$

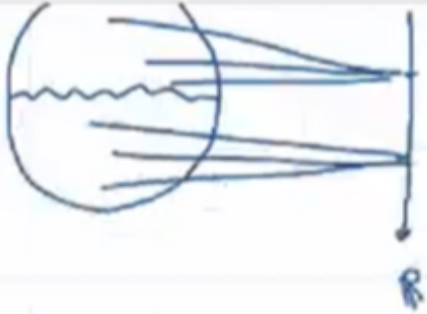
نکته: هر متغیر متغیر متقارنی Y با احتمال 1 مقدار c را به خود می گیرد.

آیا Y یک متغیر متقارنی ثابت است؟

$$\mathbb{P}[Y = c) = 1 \xrightarrow{?} \forall w \in \Omega : Y(w) = c$$

شکل روبا





اگر متغیر از مشاهدات کنند، تا خود باشد ← متغیر انتخابات رای توان شبیه یک متغیر

سنتا نی به شکل مدل کرد:

$\forall w \in \Omega$ ... A ← $X(w)=1$ ⟶ در دنباله‌های A به شود باشد ← $\omega \in A$

$\forall w \in \Omega$ ... B ← $X(w)=0$ ⟶ در دنباله‌های B به شود باشد ← $\omega \notin A$

-4726

• نکته: متغیر تصادفی فضای متناهی نمونه را افراز می‌کند و به هر یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

• مثال تاس:

$$\Omega = \{f_1, \dots, f_6\}$$

$$X(f_i) = i$$

• سوال: فرض کنید دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم ($|\Omega| = 36$).
برای این آزمایش تصادفی چند نوع متغیر تصادفی می‌توان تعریف کرد؟
(برای این فضای نمونه چند افراز وجود دارد؟)

تعداد افرازهای فضای نمونه:

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

چند تا است؟ (Bell numbers)

افرازهای ممکن:

$$\{a, b, c, d\}$$

01-4726 ② $\{a,b,c\},\{d\}\ /\ [b,c,d],\{a\}$ --- : $\binom{4}{1}=4$

③ $\{a,b\},\{c,d\}$ /--- : $\binom{4}{2}/2=3$

④ $\{a,b\},\{c\},\{d\}$ /--- : $\binom{4}{2}=6$

⑤ $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$: 1

$\Rightarrow B_4 = 15$

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای (Binomial Random Variable):

n سکه را به صورت مستقل پرتاب می‌کنیم ← تعداد شیرها چند است؟

تعداد شیرها در n پرتاب مستقل را با X نشان می‌دهیم.

$\Rightarrow X \in \{0, 1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

↳ احتمال گیر آمدن k سکه شیر

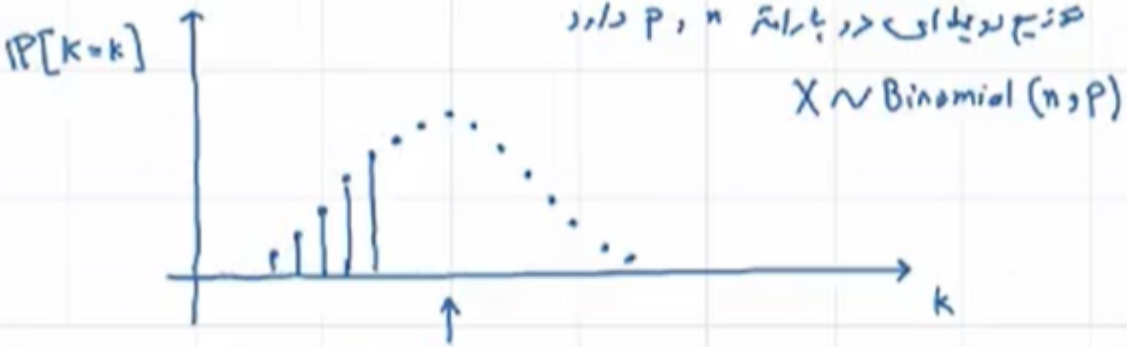
$1 = [p + (1-p)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[X=k] = 1$

• شکل تابع $\mathbb{P}[X=k]$ ← توزیع (distribution) متغیر X

توزیع دوجمله‌ای دو پارامتر n و p دارد

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$



• برای بررسی این نکته:

$\mathbb{P}[X=k]$? $\mathbb{P}[X=k+1]$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^{k}(1-p)^{n-k} \;?\; \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$

$$\frac{1-p}{n-k} \;?\; \frac{p}{k+1}$$

1-4726

$k+1-p \;\boxed{?}\; np$

$k \;\boxed{1}\; np-1+p \approx np$

تابع $P[X=k]$

$\Leftarrow$ برای $k<np$ صعودی و برای $k>np$ نزولی

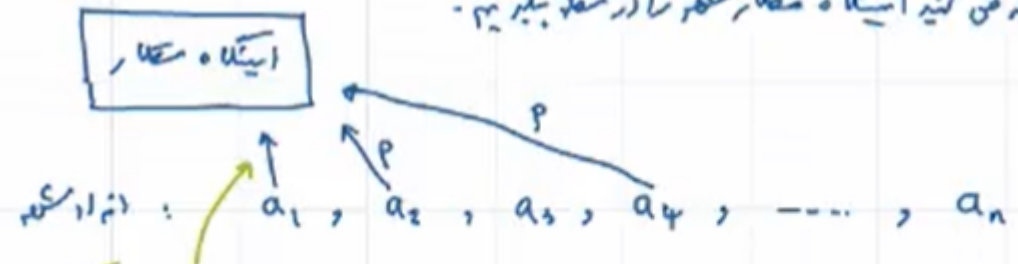
• متغیر تصادفی پواسن (Poisson R.V.)

حالت حدی متغیر تصادفی دوجمله‌ای است برای وقتی که:

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow \infty \\ p \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{such that } np=\lambda \rightarrow \text{ثابت}$$

(با حد توزیع این متغیر تصادفی است).

• مثال: عرضه کنید ایستگاه متقاضی سکه را در نظر بگیرید.



به طوریکه np یک عدد ثابت مثبت و برابر تعداد افرادی است که تقریبا
به ایستگاه می روند.

• چگونگی از توزیع دوجمله‌ای :

726

$$P[X=k] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,\dots\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k}_{\longrightarrow 1} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

4726

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}$$

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad , \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

متغیر X متاثر گسسته به فرمول می گیرد ← $P[X=k]$

Probability mass function (pmf)

تا الان منظور ما از توزیع این تابع است.

• مثال : فرض کنید یک جاده که تردد داریم و میانگین زمانی را داده است که به طور متوسط ۱۰ روز 1-4726

از سال در این جاده تصادف رخ داده است (یعنی در این ۱۰ روز متوالی یک تصادف داشته ایم).

احتمال اینکه فردا 5 تصادف داشته باشیم چقدر است؟

حل : فرض کنید X تعداد تصادفات در یک روز باشد.

جاده که تعداد زیاد و تعداد تصادفات پایین، تعداد هر ماشین یک شانس برخورد و تصادف داشته باشد. چون تعداد ماشین ها خیلی و احتمال تصادف هم خیلی کم است $\Leftarrow$ $X \sim Poisson(\lambda)$

۳۵۵ روز تصادف نداشته ایم $\Rightarrow$ $P[X=0] \simeq \frac{355}{365} \simeq 0.973 = e^{-\lambda}$

$\Rightarrow \lambda \simeq 0.028$

با فرض مستقل بودن تعاریف در مقاطع مختلف

$$\Rightarrow \quad P[X=5] = \frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!} \simeq 1.3 \times 10^{-10} \quad !!!$$

$$\Rightarrow \quad P[X=1] = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} \simeq 0.027 \gg P[X=5]$$