

آمار و احتمال مهندسی، جلد ۱۲: دوشنبه ۲۲ خرداد ۱۴۰۱

* تابع توزیع تجمعی شرطی

* متغیر تصادفی $g(x)$

* امید ریاضی برای یک متغیر تصادفی

* نامساوی جنسن (Jensen's Inequality)

* امید ریاضی مجموع و حاصلضرب دو متغیر تصادفی

* تابع توزیع تجمعی شرطی :

تابع توزیع تجمعی شرطی $F_X(x|A)$ برای متغیر تصادفی X به شرطی که A

اتفاق افتاده باشد به صورت زیر تعریف می شود:

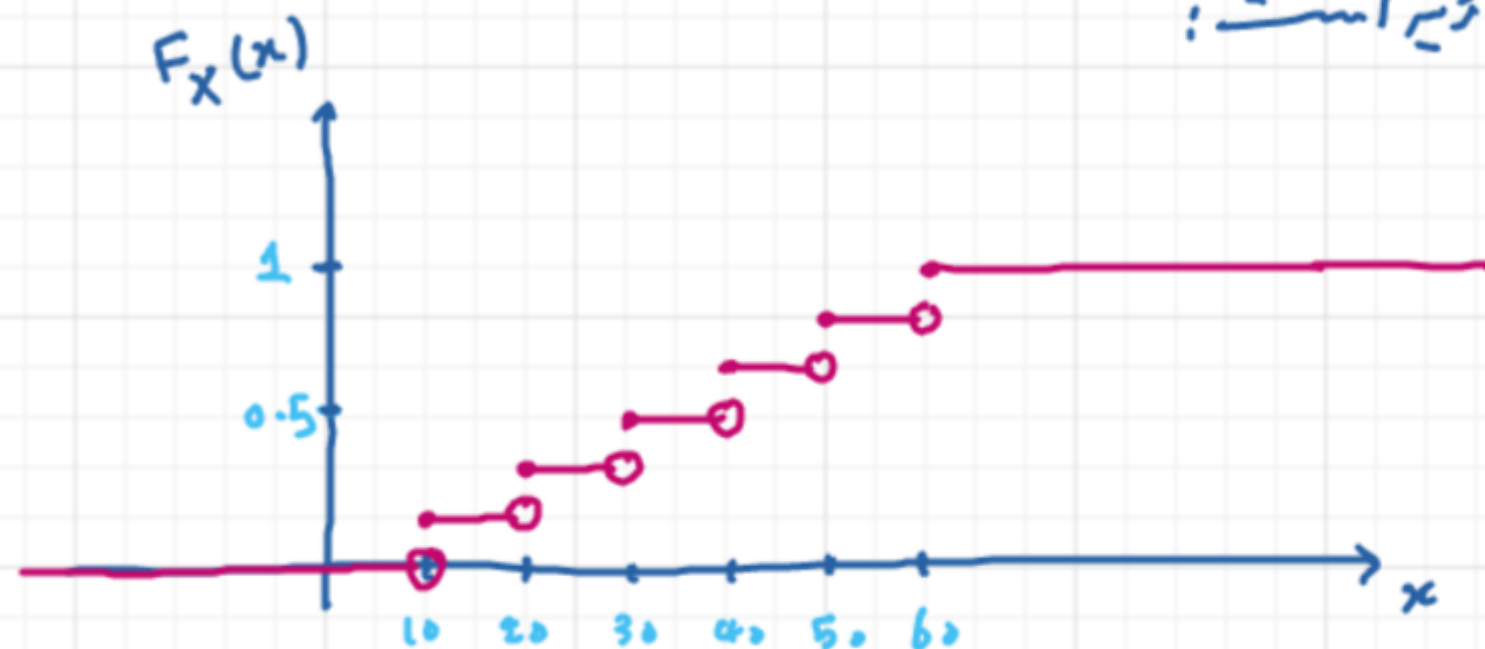
$$F_X(x|A) \triangleq P[X \leq x | A] = \frac{P[X \leq x, A]}{P[A]} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x|A) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

مثال: فرض کنید تاکی متقارن داریم و فضای نمونه به صورت زیر

$$\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$$

متغیر تصادفی X را به صورت $X(f_i) = 10 \times i$ تعریف کنید. CDF این
متغیر تصادفی به شکل زیر است:



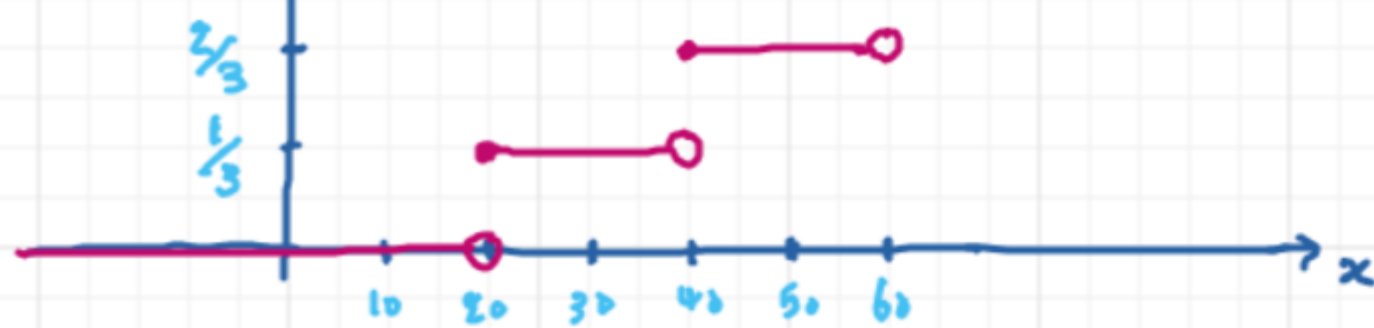
حال اگر A رویداد $A = \{f_2, f_4, f_6\}$ باشد، آنگاه CDF شرطی

$F_X(x|A)$ به شکل زیر در می آید:

$$F_X(x|A)$$

1





• در حالت کلی برای یافتن $F_X(x|A)$ باید آزمایشی ستاره‌ای مربوطه را به طور دستی پیدا کنیم.
 وی‌گانه دامنه A خود را بر حسب ستاره‌ای X بیان کرده باشد، دانستن $F_X(x)$ برای بیان $F_X(x|A)$ کافی خواهد بود.
 در ادامه دو مثال را مطرح می‌کنیم.

• مثال: فرض کنید $A = \{X \leq a\}$ باشد. آنگاه برای $F_X(x|A)$ داریم:

$$F_X(x|A) = F_X(x|X \leq a) = \frac{P[X \leq x, X \leq a]}{P[X \leq a]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } x \geq a \Rightarrow \{X \leq x, X \leq a\} = \{X \leq a\} \Rightarrow F_X(x|A) = 1 \end{array} \right.$$

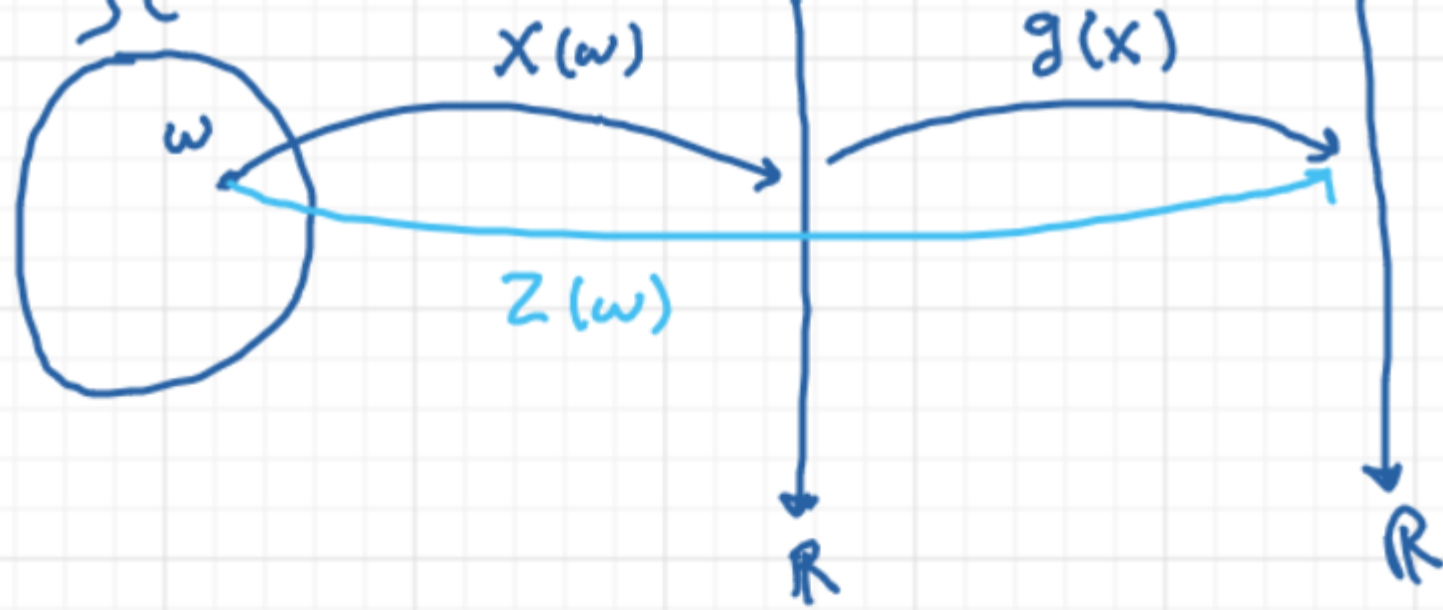
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } x < a \Rightarrow \{X \leq x, X \leq a\} = \{X \leq x\} \Rightarrow F_X(x|A) = \frac{F_X(x)}{F_X(a)} \end{array} \right.$$

مثال: فرض کنید $A = \{b < X \leq a\}$ در این صورت داریم:

$$F_X(x|A) = F_X(x | b < X \leq a) = \frac{P[b < X \leq a, b < X \leq a]}{P[b < X \leq a]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } x > a \Rightarrow \{X \leq x, b < X \leq a\} = \{b < X \leq a\} \Rightarrow F_X(x|A) = 1 \\ \text{If } b \leq x < a \Rightarrow \{X \leq x, b < X \leq a\} = \{b < X \leq x\} \Rightarrow F_X(x|A) = \frac{F_X(x) - F_X(b)}{F_X(a) - F_X(b)} \\ \text{If } x < b \Rightarrow \{X \leq x, b < X \leq a\} = \emptyset \Rightarrow F_X(x|A) = 0 \end{array} \right.$$

* متغیر تصادفی $g(x)$:



$$Z(\omega) = g(X(\omega)) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Z ترکیب دو تابع X و g است.

⇐ پس Z خودش یک متغیر تصادفی است: $Z = g(X)$

به این ترتیب با اعمال تابع g (یا پردازش g) بر روی متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی جدید به نام Z یا $g(X)$ ساخته ایم.

• مثال: فرض کنید $X \in \{-1, +1, 2\}$, $P[X=-1] = P[X=1] = P[X=2] = \frac{1}{3}$

حال تعریف کنیم $Z = X^2$ یعنی $g(x) = x^2$

در نتیجه برای PMF متغیر Z داریم:

$$Z \in \{1, 4\}, \quad P[Z=1] = \frac{2}{3}, \quad P[Z=4] = \frac{1}{3}$$

• یافتن PMF متغیر تصادفی $Y = g(X)$ بر حسب PMF متغیر X :
(X و Y متغیرهای گسسته هستند)

$$P[Y=y] = \sum_{x: g(x)=y} P[X=x]$$

• قضیه: عرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی گسسته مستقل باشند.

از روی آنها دو متغیر تصادفی $W = f(X)$ و $Z = g(Y)$ را بسازیم.

نمایش کنیم Z و W هم مستقل هستند.

اثبات: جامع نشان دهیم

$$P[W=w|Z=z] = P[W=w]$$

$$\Rightarrow P[W=w|Z=z] = \frac{P[W=w, Z=z]}{P[Z=z]}$$

$$= \frac{\sum_{x: f(x)=w} \sum_{y: g(y)=z} \underbrace{P[X=x, Y=y]}_{P[X=x] \cdot P[Y=y] \leftarrow X \perp Y}}{\sum_{y: g(y)=z} P[Y=y]}$$

$$= \frac{\left(\sum_{x: f(x)=w} P[X=x] \right) \left(\sum_{y: g(y)=z} P[Y=y] \right)}{\sum_{y: g(y)=z} P[Y=y]}$$

$$= \sum_{x: f(x)=w} P[X=x] = P[W=w] \quad \checkmark$$

* امید ریاضی برای متغیری از یک متغیر مقادیری:

مثال: عرض کینه متغیر مقادیری ثابت $X=c$ را داریم که $P[X=c]=1$

حال متغیر مقادیری $Y = \alpha X + \beta$ عین $g(x) = \alpha x + \beta$ داریم که $Y = g(X)$

$\uparrow$ $\uparrow$
 اعداد ثابت

$$\Rightarrow E[Y] = \sum_y y P[Y=y] = (\alpha c + \beta) \cdot 1 = \alpha c + \beta$$

$$= \alpha E[X] + \beta$$

• مثال: عرض کینه X یک متغیر مقادیری گسسته باشد و $g(x) = \alpha x + \beta$

$$X: \begin{cases} x_1 : & P_1 \text{ احتمال} \\ x_2 : & P_2 \text{ " "} \\ \vdots & \\ x_n : & P_n \text{ " "} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

حال $Y = g(X)$ را در نظر بگیرید:

$$Y: \begin{cases} \alpha x_1 + \beta : & P_1 \text{ احتمال} \\ \alpha x_2 + \beta : & P_2 \text{ " "} \\ \vdots & \\ \alpha x_n + \beta : & P_n \text{ " "} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[Y] = \sum_y y P[Y=y] = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta) P_i = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i P_i}_{= E[X]} + \beta \underbrace{\sum_{i=1}^n P_i}_{= 1}$$

$E[\alpha X + \beta]$

$$= \alpha E[X] + \beta = g(E[X])$$

نتیجه

• متغیر: فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد، $y = g(x)$ که یک تابع کلی است.
 آنگاه داریم:

$$\mathbb{E}[y] = \sum_y y P[Y=y] = \sum_y y \sum_{x: g(x)=y} P[X=x]$$

$$= \sum_y \sum_{x: g(x)=y} y P[X=x]$$

$$= \sum_y \sum_{x: g(x)=y} g(x) P[X=x]$$

$$= \sum_x g(x) P[X=x]$$

$$= \mathbb{E}[g(x)]$$



پس نشان داریم:

$$\mathbb{E}_{P_Y}[Y] = \mathbb{E}_{P_X}[g(X)]$$



$$\sum_y y \underbrace{P[Y=y]}$$

PMF متغیر Y



$$\sum_x g(x) \underbrace{P[X=x]}$$

PMF متغیر X

• با توجه به حرف شای که زده ایم اگر $g(x) = \alpha x + \beta$ یک تابع خطی باشد آنگاه داریم:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta = g(\mathbb{E}[X])$$

ولی در حالت کلی (یعنی تابع غیر خطی g) این حرف درست نیست:

$$\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$$

مثال: ثابت کنید اگر $g(x) = x^2$ آنگاه:

$$\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$$

یا به سببی دیگر:

$$\mathbb{E}[g(x)] \geq g(\mathbb{E}[x])$$

حل: برای $\mathbb{E}[X^2]$ داریم:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2 P[X=x]$$

$$= 1 \cdot \sum_x x^2 P[X=x]$$

$$= \left(\sum_x P[X=x] \right) \left(\sum_x x^2 P[X=x] \right) \geq \left(\sum_x x P[X=x] \right)^2$$

$$= \left(\sum_i a_i^2 \right) \left(\sum_i b_i^2 \right) = (\mathbb{E}[x])^2$$



یادآوری: نامساوی کوشی-بیوارتز

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \right]^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

برای مساله با قمار و شرط:

$$\begin{cases} a_i = \sqrt{P[X=x]} \\ b_i = x \sqrt{P[X=x]} \end{cases}$$

شرط ستاوی:

$$\frac{b_i}{a_i} = \text{const}$$

$$\Rightarrow E[X^2] \geq (E[X])^2 \quad \text{برای هر متغیر تصادفی } X$$

شرط ستاوی مساله:

$$\text{ثابت مستقل از } x = \frac{x \sqrt{P[X=x]}}{\sqrt{P[X=x]}} = x = \text{ثابت}$$

⇐ ستادی با جمله بالا برای متغیر تصادفی ثابت $X=c$ برقرار است.