آمار و احتمال مهندسی، جلسه 13، شنبه 27 فروردین 1401

---

* نامساوی جنسن (Jensen's Inequality)
* امید ریاضی مجموع و حاصلضرب دو متغیر تصادفی
* توابع نشانگر (Indicator Functions)
* مسئله جمع‌آوری کوپن (Coupon Collector Problem)

---

* مرور برخی نکات جلسه قبل

• در جلسه قبل نشان دادیم که اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد و $Y=g(X)$ یک متغیر میدی باشد که از روی X ساخته‌ایم، آنگاه برای PMF متغیر Y داریم:

$$\mathbb{P}[Y=y] = \sum_{x:\, g(x)=y} \mathbb{P}[X=x]$$

• پس نشان دادیم برای محاسبه امید ریاضی Y می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\mathbb{E}_{P_Y}[Y] = \mathbb{E}_{P_X}[g(X)]$$

$$\sum_y y \underbrace{\mathbb{P}[Y=y]}_{P_Y(y)} = \sum_x g(x) \underbrace{\mathbb{P}[X=x]}_{=P_X(x)}$$

• اگر تابع $g(x) = \alpha x + \beta$ یک تابع خطی باشد نشان داریم:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \alpha\,\mathbb{E}[X] + \beta = g(\mathbb{E}[X])$$

ولی در حالت کلی اگر که تابع $g(x)$ خطی نباشد رابطه بالا برقرار نیست:

$$\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$$

• به طور خاص برای تابع $g(x)=x^2$ نشان داریم:

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

---

* نامساوی جنسن:

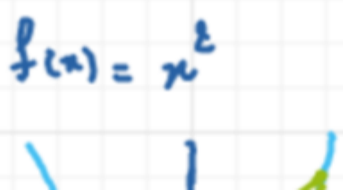
• ابتدا توابع محدب (convex) را تعریف می‌کنیم.

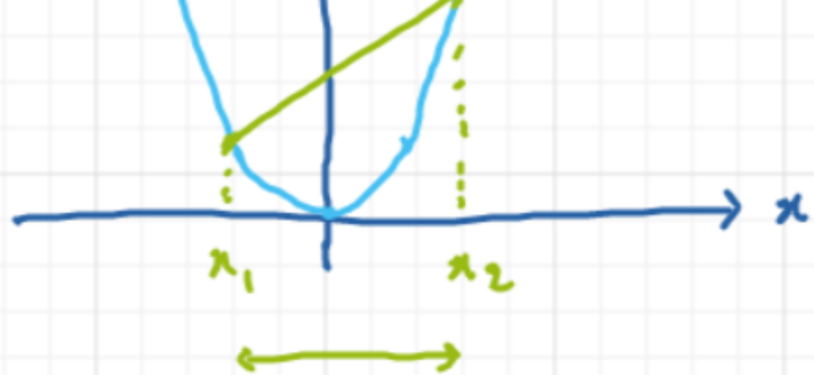
• تعریف تابع محدب: تابع $f(x): D_f \to \mathbb{R}$ که $D_f \subseteq \mathbb{R}$ یک تابع محدب است اگر که هر خطی که دو نقطه روی گراف تابع را به هم وصل کند، در فاصله بین آن دو نقطه بالای گراف تابع قرار گیرد.

به بیان ریاضی برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

• مثال: تابع x^2 محدب است.





• تعریف تابع مقعر (Concave) :

تابع $f(x)$ مقعر است اگر که $-f$ محدب باشد.

• قضیه (نامساوی جنسن):

اگر تابع f محدب باشد در این صورت برای هر متغیر تصادفی X نامساوی زیر را داریم:

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$$

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد رابطه بالا به این معنی است که:

$$\sum_x f(x)\,\mathbb{P}[X=x] \geq f\Big(\sum_x x\,\mathbb{P}[X=x]\Big)$$

• برعکس اگر تابع f مقعر باشد، نامساوی بالا به صورت عکس برقرار است.

---

* امید ریاضی مجموع دو متغیر تصادفی (گسسته):

• فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته $\longleftarrow$ $Z \triangleq X+Y$

سوال: $\mathbb{E}[Z]=?$

برای پاسخ دادن به این سوال به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_z z\,\mathbb{P}[Z=z] = \sum_z z \sum_{\substack{x,y:\\ x+y=z}} \underbrace{\mathbb{P}[X=x, Y=y]}$$

$\hookrightarrow$ تابع چگالی احتمال مشترک X و Y

$$= \sum_z \sum_{\substack{x,y:\\ x+y=z}} z\,\mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_{z} \sum_{\substack{x,y: \\ x+y=z}} (x+y)\, \mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_{x,y} (x+y)\, \mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_{x,y} x\, \mathbb{P}[X=x, Y=y] + \sum_{x,y} y\, \mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_{x} x \underbrace{\sum_{y} \mathbb{P}[X=x, Y=y]}_{= \mathbb{P}[X=x]} + \sum_{y} y \underbrace{\sum_{x} \mathbb{P}[X=x, Y=y]}_{= \mathbb{P}[Y=y]}$$

حاشیه‌ای:

$$= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

• نکته: رابطه بالا را منفصل برای متغیرهای تصادفی گسسته نشان دادیم ولی

در حالت کلی برای همه انواع متغیرهای تصادفی برقرار است.

• نتیجه: با توجه به رابطه بالا و روابطی که در جلسه قبل داشتیم:

$$\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta] = \alpha_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \alpha_n \mathbb{E}[X_n] + \beta$$

---

* امید ریاضی حاصلضرب دو متغیر تصادفی (گسسته):

• فرض: X و Y دو متغیر تصادفی گسسته $\longleftarrow$ $Z \triangleq XY$

سوال: $\mathbb{E}[Z] = ?$

• برای پاسخ می‌نویسیم:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_z z\, \mathbb{P}[Z=z]$$

$$= \sum_z z \sum_{\substack{x,y: \\ xy=z}} \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x,y} xy\, \mathbb{P}[X=x, Y=y]$$

- در حالت کلی اگر فرض روی متغیرهای X و Y نداشته باشیم در تعیین مرحله متوقف می‌شویم.

- ولی اگر فرض کنیم $X \perp Y$ می‌توانیم به شکل زیر ادامه دهیم:

$$X \perp Y \downarrow$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{x,y} xy \underbrace{\mathbb{P}[X=x]\,\mathbb{P}[Y=y]}_{=\mathbb{P}[X=x,\,Y=y]}$$

$$= \left(\sum_x x\,\mathbb{P}[X=x]\right)\left(\sum_y y\,\mathbb{P}[Y=y]\right) = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

- نکته: رابطه بالا برای هر دو متغیر تصادفی مستقل درست است.

- نکته مهم: اگر $X \perp Y$ داریم $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

ولی عکس رابطه بالا برقرار نیست. یعنی اگر برای دو متغیر تصادفی داشته باشیم $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ لزوماً X و Y مستقل نیستند.

در این حالت می‌گوییم X و Y ناهمبسته یا Un Correlated هستند.

---

* توابع شناسگر (Indicator Functions):

• در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه Ω و واقعه $A \subseteq \Omega$ در نظر بگیرید.

متغیر تصادفی $I_A(\omega)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

(تابع)

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega \notin A \\ 1 & : \omega \in A \end{cases}$$

به این توابع توابع شناسگر گفته می‌شود.

• برای امید ریاضی I_A داریم:

$$\mathbb{E}[I_A] = \sum_i i \, \mathbb{P}[I_A = i]$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}[I_A = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[I_A = 1] = \mathbb{P}[I_A = 1]$$

فرض: فضای نمونه شمارا گسسته

$$= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega] = \mathbb{P}[A]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[I_A]$$

• متغیر تصادفی I_A یک متغیر تصادفی برنولی است که از روی واقعه A تعریف شده است.

---

* مثال: مجموعه تمام جایگشت‌های ممکن $\{1,2,3\}$ را در نظر بگیرید. با احتمال یکسان یکی را انتخاب می‌کنیم.

$$\Omega = \{(123), (132), (213), (231), (312), (321)\}$$

تعریف می‌کنیم:

$Y =$ تعداد اعدادی که در جای خود قرار دارند

سوال: به طور متوسط چند عدد در جای خودشان ظاهر می‌شوند: $\mathbb{E}[Y] = ?$

راه اول: محاسبه PMF Y :

$$\mathbb{P}[Y=0] = \mathbb{P}[\{(312),(231)\}] = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}[Y=1] = \mathbb{P}[\{(132),(321),(213)\}] = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}[Y=2] = 0$$ اگر 2 عدد سر جای خودشان باشند ← سومی هم سر جای خودش است

$$\mathbb{P}[Y=3] = \mathbb{P}[\{(123)\}] = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \sum_{y} y\,\mathbb{P}[Y=y] = 1$$

راه دوم (با استفاده از توابع شناگر):

توابع I_i را برای $i=1,2,3$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_i(\omega) = \begin{cases} 0 & : \text{اگر عدد } i \text{ام سر جای خودش نباشد} \\ 1 & : \text{" " " " " " باشد} \end{cases}$$

با توجه به تعاریف بالا:

$$Y(\omega) = I_1(\omega) + I_2(\omega) + I_3(\omega)$$

داریم:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[I_1] + \mathbb{E}[I_2] + \mathbb{E}[I_3]$$

این سه متغیر تصادفی وابسته اند.

به علت تقارن داریم: $\mathbb{E}[I_1] = \mathbb{E}[I_2] = \mathbb{E}[I_3]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = 3\,\mathbb{E}[I_1]$$

$$= 3\left(0 \cdot \mathbb{P}[I_1 = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[I_1 = 1]\right)$$

$$= 3 \times \mathbb{P}[\text{عدد یک سر جای محورش باشد}]$$

$$= 1$$

✓

• مثال: امید ریاضی متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای را با استفاده از توابع شناسگر محاسبه کنید.

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$\hookrightarrow$ تعداد شیر آمدن‌ها در n پرتاب مستقل سکه‌ها

توابع شناسگر I_i را به صورت زیر تعریف کنید:

$$I_i(\omega) = \begin{cases} 0 & : \text{در پرتاب } i\text{ام شیر ظاهر نشود} \\ 1 & : \text{در پرتاب } i\text{ام شیر ظاهر شود} \end{cases} \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \quad X = I_1 + \dots + I_n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[I_1] + \dots + \mathbb{E}[I_n]$$

چون سکه‌ها در پرتاب‌های مختلف مشابه هستند $\longleftarrow$ $\mathbb{E}[I_1] = \dots = \mathbb{E}[I_n]$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = n\,\mathbb{E}[I_1]$$

یک متغیر تصادفی برنولی

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[I_1] = \mathbb{P}[\text{شیر آمدن سکه اول}] = p$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = np$$

---

* مثال: مسئله جمع آوری کوپن

فرض n نوع کوپن داریم. در هر قرعه‌کشی یک کوپن به تصادف قرار می‌دهیم.

و تعداد نامتناهی قرعه‌کشی داریم.

شروع می‌کنیم قرعه‌کشی‌ها را بازکردن و آنقدر ادامه می‌دهیم تا همه n کوپن را جمع کنیم. فرض کنید متغیر:

$X =$ تعداد قرعه‌کشی‌هایی که باید بازکنیم تا n کوپن را بیابیم

سوال: به طور متوسط با چند توپ بازی کنیم تا هر n توپ را جمع کنیم: $\mathbb{E}[X]=?$

$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ ----