

* مثال: مسئله جمع آوری کوپن (Coupon Collector Problem)

* امپریالیستی شرطی

. مثال

* تعریف $E[X|Y]$

. مثال

* مسئله جمع آوری کوپن :

• فرض کنید n نوع کوپن مختلف وجود دارد که می خواهیم از هر کدام یکی جمع کنیم. مقدار نامتناهی جعبه داریم که در هر کدام یک کوپن است. احتمال اینکه در جعبه ای کوپن نام باشد $\frac{1}{n}$ است (کوپن ها احتمال یکسان دارند).

برای جمع آوری n کوپن شروع می کنیم یکی یکی جعبه ها را بازمی کنیم. هر وقت که n کوپن را جمع کرده ایم کار با تمام می شود. متغیبه تصادفی X را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعداد جعبه‌هایی که بزرگتر ده‌ایم تا n کوپن را $X =$
جمع کنیم

سوال: به طور متوسط باید چند جعبه را بزرگ کنیم تا همه n شوخ کوپن را جمع کنیم؟

به عبارت دیگر: $E[X] = ?$

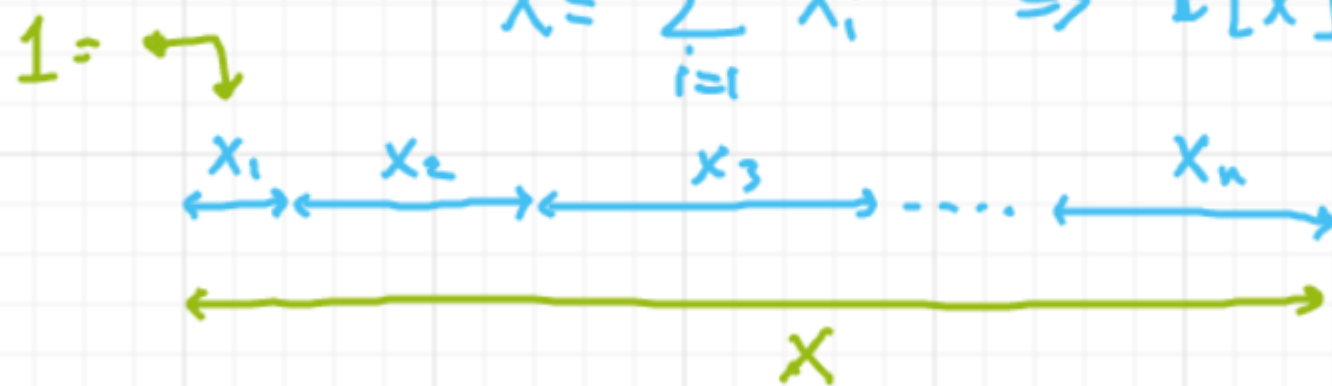
حل: به طور رسمی $X \geq n$

متغیرهای تصادفی X_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

X_i : تعداد جعبه‌هایی که باید بزرگ کنیم تا یک کوپن جدید پیدا کنیم به شرط اینکه قبل

از آن $i-1$ کوپن جمع کرده باشیم. داریم:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$



به راحتی متوجه می‌شویم X_i ها توزیع هندسی دارند با احتمال موفقیت $P_i = \frac{n-i+1}{n}$

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1} \quad \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}$$

Harmonic number

$$= n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad \xrightarrow{\text{Harmonic number}} H_n = \Theta(\log n)$$

$$\xrightarrow{\text{Harmonic number}} = \Theta(n \log n)$$

* امید ریاضی شرطی:

فرض کنید آزمایشی تعدادی داریم. گاهی علامتند هستیم امید ریاضی یک متغیر X که بر روی این آزمایشی تعریف شده است را مشروط به اینکه واقعه A اتفاق افتاده باشد، بدست میآوریم.

مثلاً در یک جامعه آماری متشکل از تعدادی زن و مرد متغیر X نمایی دلخواه مدفردی است که به طور مشروطی از میان این اقرار انتخاب شده است.

حال با این شرایط مثلاً علامتند هستیم که امید ریاضی X را به شرطی که به اینم فرد انتخاب شده زن است بدست میآوریم. یعنی:

$$\mathbb{E}[X \mid \text{فرد انتخاب شده زن باشد}]$$

- از قبل می دانیم مشروط که در یک متغیر تصادفی گسسته به وقوع واسعه A توزیع (PMF) آن را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$P[X=x | A] = \frac{P[X=x, A]}{P[A]}$$

- در این صورت امید ریاضی شرطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E[X | A] = \sum_x x P[X=x | A]$$

- مثال: برای یک تاس متوازن که $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$ نمایش دهنده وجه های آن

$$E[X] = 3.5 \quad \text{باشد داریم:}$$

ولی به سطر زوج بدون X داریم:

$$E[X | X \text{ زوج باشد}] = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6 = 4$$

• نکته: به راحتی می توان نشان داد که برای متغیرهای تصادفی گسسته

متغیر جمع برای امید ریاضی شرطی نیز برقرار است :

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n | A] = \mathbb{E}[X_1 | A] + \dots + \mathbb{E}[X_n | A]$$

البته تأکیدی کنیم که رابطه بالا برای همه اشیاء متغیرهای مقداردهی برقرار است.

مثال: فرض کنید دو تاس مستقل داریم و متغیرهای مقداردهی $\{1, \dots, 6\}$ X, Y بگیریم. ^{و شایه}
 روبروی تاس ها بایستند. اگر به این جمع دو تاس عدد 8 باشد، می‌توانیم هر کدام از بیضی ها ^{و شایه}
 چقدر است؟

حل: فرض کنیم $Z = X + Y$ و $\mathbb{E}[X | Z=8] = ?$

$$\mathbb{E}[Z | Z=8] = 1 \times 8 = 8$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X+Y | Z=8] = 8 \Rightarrow \mathbb{E}[X | Z=8] + \mathbb{E}[Y | Z=8] = 8$$

شایه
تاس ها } به علت
مستقل بودن

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X | Z=8] = \mathbb{E}[Y | Z=8] = 4$$

نکته: لازم نیست تاکی نامستقارن باشد. فقط باید به گونه‌ای باشد که امتحان
وقوع $Z=8$ صفر نباشد.

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع هندسی با پارامتر p باشد. معنی:

$$P[X=k] = (1-p)^{k-1} p \quad : \text{PMF}$$

از قبل می‌دانیم:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

حالی خواهیم دید ریاضی شرطی را ببینیم:

$$E[X | X \text{ زوج باشد}] = ?$$

حل: در اینجا وقتی X را بیشتر به زوج می‌دانیم که ده‌ایم، توزیع آنرا متغیر داده‌ایم. به این معنی

که احتمال همه اعداد فرد را صفر کرده‌ایم و احتمال اعداد زوج ما به $P[X \text{ زوج باشد}]$ متغیر

کرده‌ایم. در این حالتی خواهیم دید ریاضی متغیر جدید را حساب کنیم.

3998-1803. دو راه داریم: ① توزیع متغیر جدید را می بینیم و بعد امید ریاضی آن را حساب کنیم. ② راه دوم را در ادامه می گوئیم.

$$\tilde{X} = (X | \text{زوج باشد}) \leftarrow \text{منفذ مقادیر زوج را می گیرد.}$$

$$\Rightarrow E[\tilde{X}] = E[X | \text{زوج باشد}]$$

$$\Rightarrow \tilde{X} = 2Z$$

که متغیر تصادفی جدید Z برابر $\frac{\tilde{X}}{2}$ است. $Z \in \mathbb{N}$

ادعا: متغیر Z توزیع هندسی دارد.

دست کنید $\frac{P[Z=k+1]}{P[Z=k]} = \text{یک عدد ثابت مستقل از } k$. $Z \leftarrow \text{یک متغیر تصادفی هندسی است.}$

حال باید پایه پایه P_2 پیدا کنیم:

$$P[X=2k+2] \quad P[\tilde{X}=2k+2] \quad P[Z=k+1]$$

$$1 - P_2 = \frac{P[Z=1]}{P[\tilde{X}=2k]} = \frac{P[X=2k]}{P[X=2k]} = (1-P)$$

$$\Rightarrow P_2 = 1 - (1-P)^2 = P(2-P) \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P(2-P)}$$

$$\Rightarrow E[\tilde{X}] = \frac{2}{P(2-P)} = E[X | \text{د.ج. } X]$$

$$E[X | \text{د.ج. } X] = \frac{2}{P(2-P)} - 1 \quad \text{به طور مشابه:}$$

* تعریف $E[X|Y]$

تاکنون تعریف امید ریاضی شرطی را دیده ایم. بنای این ^{معنای} عبارت زیر مای دانست:

$$E[X | \text{واقعه } Y=y] = \sum_x x P[X=x | Y=y]$$

دقت کنید که عبارت $E[X | Y=y]$ مای توان به عنوان تابعی از y نگاه کرد.

$$g(y) \triangleq \mathbb{E}[X|Y=y]$$

چون $g(y)$ یک تابع است می‌توانیم یک متغیر تصادفی به عنوان ورودی دریم و خروجی آن را نگاشت کنیم. با توجه به این نکته:

$$\mathbb{E}[X|Y] \triangleq g(Y)$$

با توجه به این تعریف، $\mathbb{E}[X|Y]$ خودش یک متغیر تصادفی است.

• مقصود: برای متغیرهای تصادفی دلفواه X, Y رابطه زیر را داریم:

$$\mathbb{E}_{\sim P_Y} \left[\underbrace{\mathbb{E}[X|Y]}_{g(Y)} \right] = \mathbb{E}_{\sim P_X} [X]$$

رابطه بالا برای متغیرهای گسست به شکل زیر یازی شود:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_y g(y) P[Y=y] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y=y] \cdot P[Y=y]$$

امید ریاضی X را به صورت یک جمع وزن دار از امید ریاضی های شرطی X نوشته ایم.

• اثبات برای وقتی که X و Y گسسته باشند:

$$\mathbb{E}_{\sim P_Y} [\mathbb{E}[X|Y]] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y=y] P[Y=y]$$

$$= \sum_y \sum_x x \underbrace{P[X=x|Y=y] P[Y=y]}_{= P[X=x, Y=y]}$$

$$= \sum_x x \underbrace{\sum_y P[X=x, Y=y]}_{= P[X=x] \quad \text{حکله سازی}}$$

$$= \mathbb{E}[X]$$

مثال: یک معدنی در یک معدنی که 3 در دارد گه امتداد است.

در اول اورابه تنلی هدایت می کند که بعد از 2 ساعت می تواند از معدن خارج شود.

در دوم اورابه تنلی هدایت می کند که بعد از 3 ساعت می تواند به مکان اولش یا زیگره داند.

در سوم مانند در دوم است با این تفاوت که می تواند از 5 ساعت به مکان اولش یا زیگره داند.

فرض کنید معدنی حافظه درستی ندارد و هر بار با احتمال مساوی انتخاب می کند.

به طور متوسط بعد از چقدر طول می کشد تا معدنی تپا ت پیدا کند؟



حل: فرض کنید X زمانی باشد که طول می کشد تا معدنی تپا ت پیدا کند.

Y_1 را به عنوان دری که در اول انتخاب می کند در نظر بگیرید.

$$\Rightarrow E[X] = E[E[X|Y_i]]$$

$$= E[X|Y_1=1] \cdot P[Y_1=1] + E[X|Y_1=2] \cdot P[Y_1=2] \\ + E[X|Y_1=3] \cdot P[Y_1=3]$$

$$= \frac{1}{3} (E[X|Y_1=1] + E[X|Y_1=2] + E[X|Y_1=3])$$

و داریم:

$$\begin{cases} E[X|Y_1=1] = 2 \\ E[X|Y_1=2] = 3 + E[X] \\ E[X|Y_1=3] = 5 + E[X] \end{cases}$$

بعد از سه حالت بی‌گانه این سه حالت اول:

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{3} (2 + (3 + E[X]) + (5 + E[X]))$$

$$\Rightarrow E[X] = 10$$