آمار و احتمال مهندسی، جلسه 15: شنبه ۱۰ اردیبهشت ۱۴۰۱

---

* یک مثال از امید ریاضی شرطی
* واریانس و خواص آن
* کواریانس و خواص آن
* واریانس متغیرهای تصادفی مشهور
* تابع مولد گشتاور

---

* مثال: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسن با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، امید ریاضی X را به شرط اینکه $X+Y=n$ باشد بیابید.

حل: ابتدا تابع جرم احتمال X به شرط $X+Y=n$ را می‌یابیم:

$$\mathbb{P}[X=k \mid X+Y=n] = \frac{\mathbb{P}[X=k, X+Y=n]}{\mathbb{P}[X+Y=n]} = \frac{\mathbb{P}[X=k, Y=n-k]}{\mathbb{P}[X+Y=n]}$$

$X \perp Y$

$$= \frac{\mathbb{P}[X=k]\cdot\mathbb{P}[Y=n-k]}{\mathbb{P}[X+Y=n]}$$

تمرین: نشان دهید $x+y$ توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ دارد

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{k}}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

به عبارت دیگر توزیع شرطی X به شرط $X+Y=n$ یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ است. بنابراین داریم:

$$\mathbb{E}[X \mid X+Y=n] = n\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

* واریانس یک متغیر تصادفی :

• تعریف واریانس : واریانس یک متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mathrm{Var}[X] \triangleq \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] \quad , \mu \triangleq \mathbb{E}[X]$$

$$= \mathbb{E}\Big[X^2 - 2\underbrace{\overbrace{\mathbb{E}[X]}^{=\mu}}_{\text{یک عدد ثابت}} \cdot X + \big(\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{یک عدد ثابت}}\big)^2\Big]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\left(\mathbb{E}[X]\right)^2 + \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \left[d\left(X, \mathbb{E}[X]\right)\right]^2$$

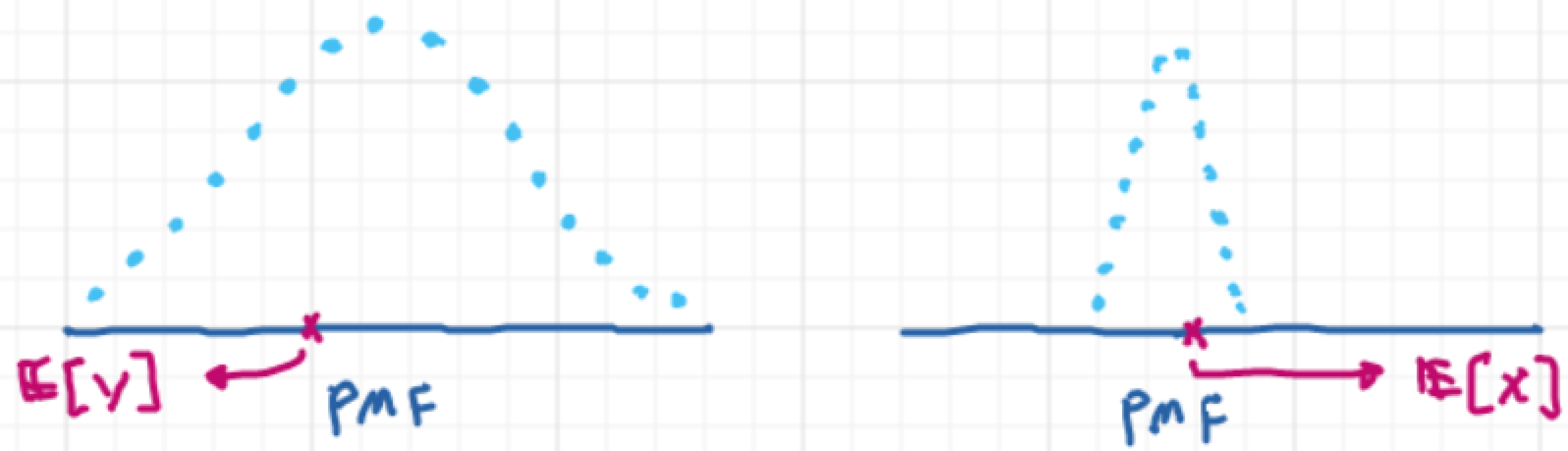
• تعبیر واریانس : واریانس یک متغیر تصادفی به نحوی نشان دهنده فاصله آن متغیر تصادفی از متغیر تصادفی ثابت (همان امید ریاضی) است.

• در اینجا معیاری که برای فاصله دو متغیر تصادفی در نظر گرفته ایم معیار زیر است:

معیاری برای فاصله دو متغیر تصادفی X و Y :

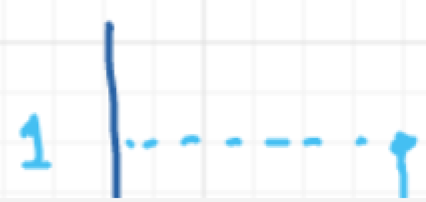
$$d(X,Y) \triangleq \sqrt{\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right]}$$

• به بیان شهودی‌تر دو متغیر تصادفی با توزیع‌های مطابق شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



توزیع سمت راست حول یک نقطه متمرکزتر است و به بیانی به متغیر ثابت نزدیک‌تر است نسبت به توزیع سمت چپ. در نتیجه واریانس متغیر تصادفی با توزیع سمت راست از واریانس متغیر تصادفی با تابع جرمی احتمال سمت چپ کمتر است.

• حالت حدی (متغیر تصادفی ثابت



PMF

$\longrightarrow \mathbb{E}[Z] = C \longrightarrow \mathrm{Var}[Z] = 0$

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathbb{E}\big[(Z - \underbrace{\mathbb{E}[Z]}_{=C})^2\big] = \mathbb{E}\big[(Z - C)^2\big]$$

$$= 1 \cdot (C - C)^2 = 0$$

• انحراف معیار (Standard deviation):

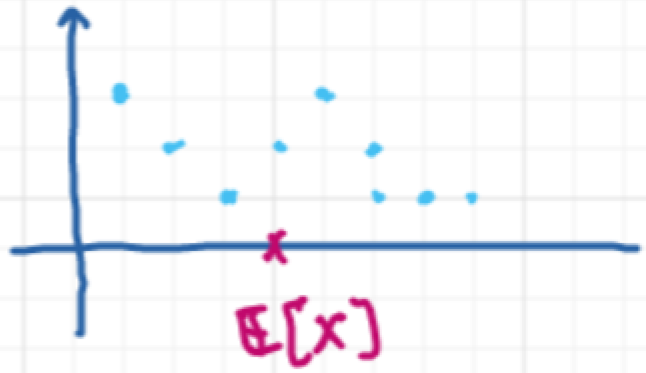
$$X \text{ انحراف معیار } = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

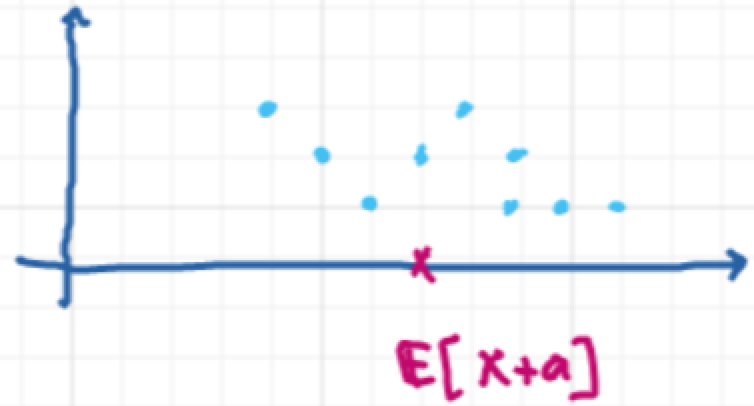
• خواص واریانس:

① $\mathrm{Var}[aX] = a^2\, \mathrm{Var}[X]$

عدد ثابت

② $\mathrm{Var}[X + a] = \mathrm{Var}[X]$





③ $$\begin{aligned}
Var[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\left(X+Y-\mathbb{E}[X+Y]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]+Y-\mathbb{E}[Y]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)^2+\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)^2 \\
&\qquad +2\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\Big] \\
&= Var[X]+Var[Y]+2\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\right]}_{\triangleq\, Cov[X,Y]} \\
&= Var[X]+Var[Y]+2\,Cov[X,Y]
\end{aligned}$$

• در نتیجه اگر $\mathrm{Cov}[X,Y]=0$ $\longrightarrow$ $\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]$

• تعریف (ناهمبستگی) (uncorrelated):

دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته (uncorrelated) هستند اگر که

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{Cov}[X,Y]=0$$

ضمناً برای کواریانس داریم:

$$\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$=\mathbb{E}[XY]-\mu_X\mu_Y$$

• استقلال X و Y یک شرط کافی برای $\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]$ است.

• به طور خلاصه :

$$X \perp Y \longrightarrow \mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] \longleftrightarrow \operatorname{Cov}[X,Y]=0$$

$$\operatorname{Cov}[X,Y]=0 \longrightarrow \operatorname{Var}[X+Y]=\operatorname{Var}[X]+\operatorname{Var}[Y]$$

• خواص کواریانس :

1. $\operatorname{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

2. $\operatorname{Cov}[X,X]=\operatorname{Var}[X]$

3. $\operatorname{Cov}[aX,Y]=a\operatorname{Cov}[X,Y]$

4. $\operatorname{Cov}[X,Y+Z]=\operatorname{Cov}[X,Y]+\operatorname{Cov}[X,Z]$

4'. $\operatorname{Cov}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i,\ \sum_{j=1}^{n}Y_j\right]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Cov}[X_i,Y_j]$

• با توجه به حرف‌های بالا: برای واریانس جمع n متغیر تصادفی داریم:

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mathrm{Cov}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i , \sum_{j=1}^{n} X_j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}[X_i , X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j \neq i} \mathrm{Cov}[X_i , X_j]$$

• نتیجه: اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل باشند، داریم:

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}[X_i , X_j] = 0 \quad : i \neq j$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}[X_1 + \dots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \dots + \mathrm{Var}[X_n]$$

• مثال (ماتریس کواریانس):

فرض کنید X و Y دو متغیر نشانگر وقایع A و B باشند :

Indicator Func.

$$X = \begin{cases} 1 & : \text{اگر } A \text{ اتفاق بیفتد} \\ 0 & : \text{" " " " نیفتد} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & : \text{اگر } B \text{ اتفاق بیفتد} \\ 0 & : \text{" " " " نیفتد} \end{cases}$$

حال داریم :

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{P}[X=1, Y=1] - \mathbb{P}[X=1] \cdot \mathbb{P}[Y=1]$$

$$\mathrm{Cov}[X, Y] > 0 \iff \mathbb{P}[Y=1 \mid X=1] > \mathbb{P}[Y=1]$$

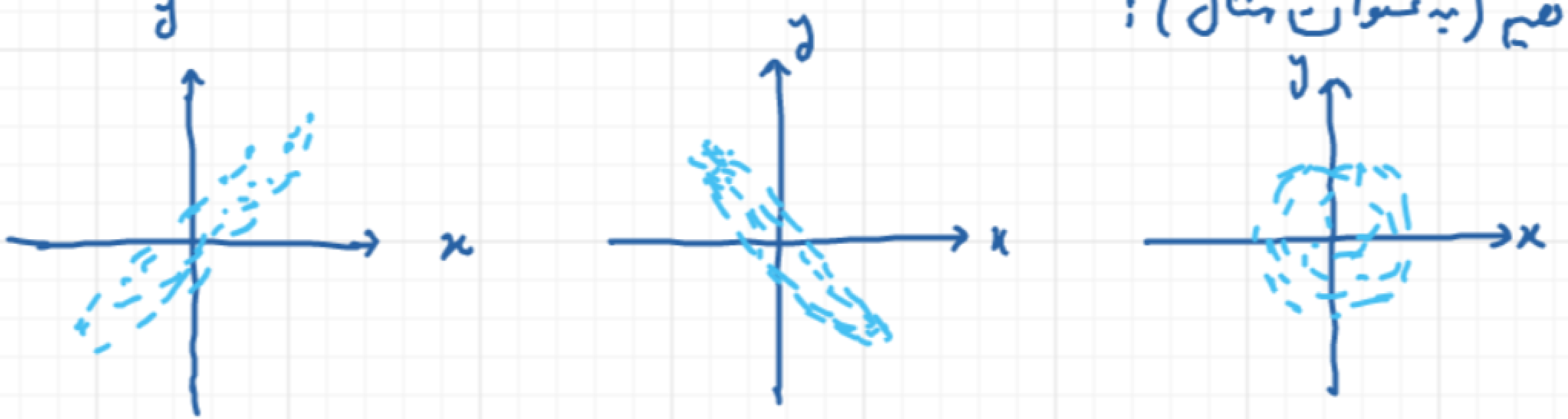
واقعه $\{X=1\}$ واقعه $\{Y=1\}$ را تقویت می‌کند.

• در حالت کلی اگر کواریانس دو متغیر تصادفی بزرگ‌تر از صفر باشد ، افزایش یکی افزایش

دیگری را محتمل‌تری کند. (X و Y با هم همبستگی دارند).

مقدار منفی کوواریانس عکس حرکت بالا را نتیجه می‌دهد.

• فرض کنید از متغیرهای تصادفی X و Y نمونه بگیریم و در یک صفحه دو بعدی نمایش دهیم (به عنوان مثال):



$Cov[X,Y] > 0$ $\qquad$ $Cov[X,Y]$ $\qquad$ $Cov[X,Y] \approx 0$

• مثال) X و Y وابسته هستند ولی ناهمبسته‌اند:

$X \in \{-2,-1,1,2\}$ با احتمال مساوی $\longrightarrow$ $E[X]=0$

$Y = X^2$ ... $Y \in \{1,4\}$ $\longrightarrow$ $E[Y] \neq 0$

$$X \not\perp Y \Leftarrow$$

حال کواریانس X ، Y را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] - 0 \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0 \quad \Longleftrightarrow$$ X ، Y ناهمبسته‌اند

در این مثال با افزایش Y ممکن است X زیاد یا کم شده باشد.

---

* واریانس چند متغیر تصادفی گسسته مشهور:

• متغیر تصادفی برنولی:

$$X = \begin{cases} 1 & : \text{با احتمال } p \\ 0 & : \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = p(1-p)$$

• متغیر تصادفی دوجمله‌ای :

$X \sim \mathrm{Binom}(n, p)$

$\hookrightarrow \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$l \triangleq k-1 \longrightarrow$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{n-l-1}$$

$$= np \left[\sum_{l=0}^{n-1} l \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{n-l-1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{n-l-1} \right]$$

$\sim \mathrm{Binom}(n-1,p) \qquad \sim \mathrm{Binom}(n-1,p)$

$= (n-1)p \qquad = 1$

$$= np\left[(n-1)p + 1\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= np\left[(n-1)p+1\right] - n^2p^2 = np(1-p)$$

روش ساده‌تر برای محاسبه واریانس توزیع دوجمله‌ای :

می‌توانیم X را به صورت جمع n متغیر تصادفی مستقل برنولی با احتمال p در نظر بگیریم:

$$X = I_1 + \dots + I_n$$

$I_1, \dots, I_n$ ها مستقل هستند ← دو به دو هم مستقل هستند

$\mathrm{Cov}[I_i, I_j] = 0$,

656899-1299-1171

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[I_1] + \cdots + \text{Var}[I_n] = n\,[p(1-p)] \checkmark$$