

* داریابی متغیرهای تصادفی مشترک (گسسته)

* تابع مولد گشتاور (Moment generating func.)

* متغیرهای تصادفی پیوسته (مقادیر اولیه)

* محاسبه داریابی برای بردن از متغیرهای تصادفی

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$$

$\downarrow = \mathbb{E}[X]$

• داریابی:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

• داریابی متغیر تصادفی پواسن:

$$\Rightarrow P[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$x \stackrel{d}{=} k-1 \rightarrow$$

$$= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \left[\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}}_{\mathbb{E}[\text{Poisson}(\lambda)] = \lambda} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}}_{=1} \right]$$

$$= \lambda(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow \text{Var}[x] = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \text{Var}[x] = \mathbb{E}[x] = \lambda$$

• محاسب واریانس مستقیماً تعدادی هواکن با روشی دیگر:

توزیع هواکن حالت صدی توزیع دو جمله‌ای است:

$$\text{var}[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} np(1-p) = \lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} np - np^2 = \lambda - \lambda_{x0} = \lambda$$

$$np = \lambda$$

$$np > 1$$

• متغیر تصادفی هندسی :

$$P[X=k] = (1-p)^{k-1} p \quad : \quad k \in \mathbb{N}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{=1} p$$

می توانیم با رویارشتن گرفتن مثبت به 2 این سری را بیابیم.

$$\Rightarrow \text{var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

* گشتاورها (Moments) یک متغیر تصادفی :

$$E[X^0] = 1$$

$$E[X^1] = \mu_x$$

$$\mathbb{E}[x^2]$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{E}[x^k] :$$

گشتا در k -ام متغیر تصادفی X

* تابع مولد گشتا، (Moment generating func) :

. تابع مولد گشتا در متغیر تصادفی X به صورت زیری شود :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] , \quad t \in \mathbb{R}$$

. خواص تابع مولد گشتا در :

می‌توان مشتق‌های این تابع را در نقطه $t=0$ نگاه داشت :

$$\textcircled{1} \quad \phi_X(0) = \mathbb{E}[e^{0x}] = 1 = \mathbb{E}[x^0] : \text{گشتا در صفر ام } X$$

$$\textcircled{2} \quad \phi'_X(0) = \left. \frac{d}{dt} \phi_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{tx}] \right|_{t=0}$$

$$= \mathbb{E} \left[\frac{d}{dt} e^{tX} \right] \Big|_{t=0} = \mathbb{E} [X e^{tX}] \Big|_{t=0}$$

$$= \mathbb{E} [X] \quad : \quad \text{گشتا در مرتبه اول } X$$

$$\textcircled{3} \quad \phi_X''(0) = \mathbb{E} \left[\frac{d^2}{dt^2} e^{tX} \right] \Big|_{t=0} = \mathbb{E} [X^2 e^{tX}] \Big|_{t=0}$$

$$= \mathbb{E} [X^2] \quad : \quad \text{گشتا در مرتبه دوم } X$$

• اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم: $\forall t \quad \phi_X(t) = \phi_Y(t)$

آنگاه X و Y توزیع یکسانی دارند. یعنی:

$$F_X(\alpha) = F_Y(\alpha) \quad : \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

• تابع $\phi_X(t)$ یک تابع محدب است:

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_X(t) = \mathbb{E} \left[\underbrace{X^2}_{\geq 0} \underbrace{e^{tX}}_{\geq 0} \right] \geq 0 \Rightarrow \phi_X(t) \text{ محدب است} \quad \text{از ۱:}$$

* معکوب تابع مولکشتاور برای برخی از متغیرهای تصادفی:

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

• توزیع دوماه ای:

$$= \sum_{k=0}^n e^{tk} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + (1-p))^n$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = n(pe^t + 1-p)^{n-1} pe^t \Rightarrow \phi'(0) = \mathbb{E}[X] = np \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \phi''(t) = n(n-1)(pe^t + 1-p)^{n-2} (pe^t)^2 + n(pe^t + 1-p)^{n-1} pe^t$$

$$\Rightarrow \phi''(0) = \mathbb{E}[X^2] = n(n-1)p^2 + np \quad \checkmark$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

• توزیع پواسن :

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} \rightarrow \mathbb{E}[X] = \phi'(0) = \lambda \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \phi''(t) = (\lambda e^t) e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \phi''(0) = \lambda^2 + \lambda \quad \checkmark$$

• متغیر تصادفی هندسی :

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1} p$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} [e^t (1-p)]^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^t (1-p)}{1 - e^t (1-p)}$$

با فرض اینکه : $t < -\ln(1-p)$:

$$= \frac{pe^t}{1 - e^t(1-p)}$$

$$\Rightarrow \phi'(0) = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \phi''(0) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

• نتیجه: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند برای تابع مولد گشتاور $X+Y$

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

داریم:

$$h(Y) \perp g(X) \iff Y \perp X$$

$$g(Y) \perp g(X) \iff$$

حالت خاص بالایی

$$\Rightarrow \phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \cdot \mathbb{E}[e^{tY}] = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

• مثال: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل هواکن با پارامترهای λ_1, λ_2 باشند

نشان دهیم جمع آنها نیز پواسن است:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1), \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2), \quad X \perp Y$$

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t - 1)} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \checkmark$$

$$P[X+Y=k] = \sum_{l=0}^{\infty} P[X+Y=k | Y=l] P[Y=l] \quad \left. \begin{array}{l} \text{قانون دیرلی:} \\ \text{قاعده احتمال} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} P[X=k-l] P[Y=l]$$

⋮

* متغیرهای مقادیری پیوسته

• متغیرهای مقادیری پیوسته (مقادیر ادویه):

مقادیری متونه نامشمار داریم و یک نگاشت (متغیر مقادیری) که این مقادیری متونه نامشمار را به یک زیر مجموعه نامشمار از اعداد حقیقی ببرد.

• مثال: یک نقطه را به صورت یکدافت در دایره واحد انتخاب می‌کنیم.



X : فاصله نقطه انتخاب شده تا محور x ← یک متغیر مقادیری پیوسته

$$X \in [0, 1]$$

• مثال: ولی اگر γ را به صورت زیر تعریف کنیم، یک متغیر مقادیری گسسته است:

$$X = 12 \quad \Omega$$



• مقداری هموار!

فرض کنید یک نقطه را به صورت یکنواخت در بازه $[0,1]$ انتخاب کنیم و مقدار آن را به متغیر X نسبت دهیم.

$$P[X \in [a, b]] = b - a$$

$$[a, b] \subseteq [0, 1]$$

به صورت همواری:

$$= \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$$

اگر چند ناحیه مجزا هم داشته باشیم طریقی مشابه عمل کرد:

$$A = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right] \rightarrow$$

$$A \subseteq [0, 1]$$

$$P[X \in A] = \int_A 1 \cdot dx = \int_{1/5}^{2/3} 1 \cdot dx + \int_{4/5}^{5/6} 1 \cdot dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5} \right)$$

• در حالت کلی ممکن است توزیع ما میگوید این مقدار را میگیریم

یک سبب. زیرا بعضی

از مقادیر x محتمل تر
هستند.

← برای اینکه این تفاوت در احتمال وقوع را نشان دهیم

از یک تابع به نام تابع چگالی احتمال استفاده میکنیم: $f_X(x)$

$f_X(x)$

به عنوان مثال تابع رویداد



مکانی ده اعداد
حول و خوش ۵ محتمل

هستند تا اعداد حول و خوش یک.

