آمار و احتمال مهندسی، جلسه ۱۷: دوشنبه ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۱

---

* متغیرهای تصادفی پیوسته
  - تابع چگالی احتمال
* برخی از متغیرهای تصادفی پیوسته مشهور
  - متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت
  - متغیر تصادفی با توزیع نمایی
  - بدون حافظه بودن توزیع نمایی
  - متغیر تصادفی با توزیع گوسی یا نرمال

---

* متغیرهای تصادفی پیوسته:

- تعریف متغیر تصادفی پیوسته: متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی پیوسته است اگر تابع توزیع تجمعی آن ($F_X(x)$) یک تابع پیوسته باشد.

- متغیر: در این صورت می‌توان نشان داد که یک تابع نامنفی درجه $f_X(x)$ وجود دارد که برای همه $x \in (-\infty,+\infty)$ تعریف شده باشد و برای هر زیر مجموعه $B \subseteq \mathbb{R}$ داشته باشیم:

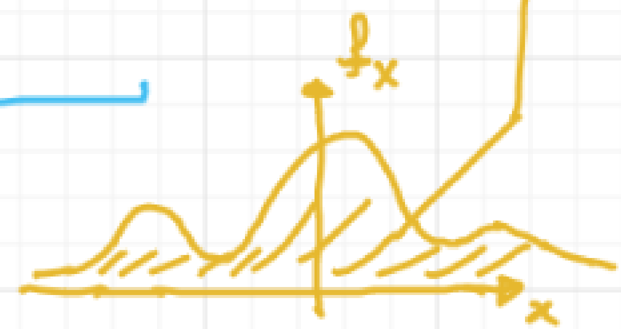
$$\mathbb{P}[X \in B] = \int_B f_X(x)\,dx$$

به تابع $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال (Probability Density Func.) (Pdf) متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

• نکته: می‌دانیم متغیر تصادفی X حتماً یک مقدار در بازه $(-\infty,+\infty)$ به خود می‌گیرد. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} & P[X\in(-\infty,+\infty)]=1 \\ \text{از طرفی:}\quad & =\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{} = 1$$

مساحت زیر نمودار تابع چگالی احتمال



• نتیجه: با توجه به مطلب بالا، مثلاً اگر داشته باشیم $B=[a,b]$ آنگاه داریم:

$$P[a\le X\le b]=\underbrace{\int_a^b f_X(x)\,dx}_{\text{مساحت زیر نمودار pdf در بازه } [a,b]}$$

• نکته: دقت کنید اگر $a=b$ باشد، داریم:

$$P[X=a]=\int_a^a f_X(x)\,dx=0$$

این رابطه بیان می‌کند که احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته یک مقدار خاص را به صورت بگیرد برابر صفر است.

به بیان دیگر منقطه چگالی احتمال واقعه $\{X=a\}$ غیر صفر است که تابع توزیع تجمعی در نقطه $x=a$ یک پرش داشته باشد.

• رابطه بین تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال:

$$F_X(x) \triangleq \mathbb{P}[X \in (-\infty, x]] = \mathbb{P}[-\infty < X \leq x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

در نتیجه با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

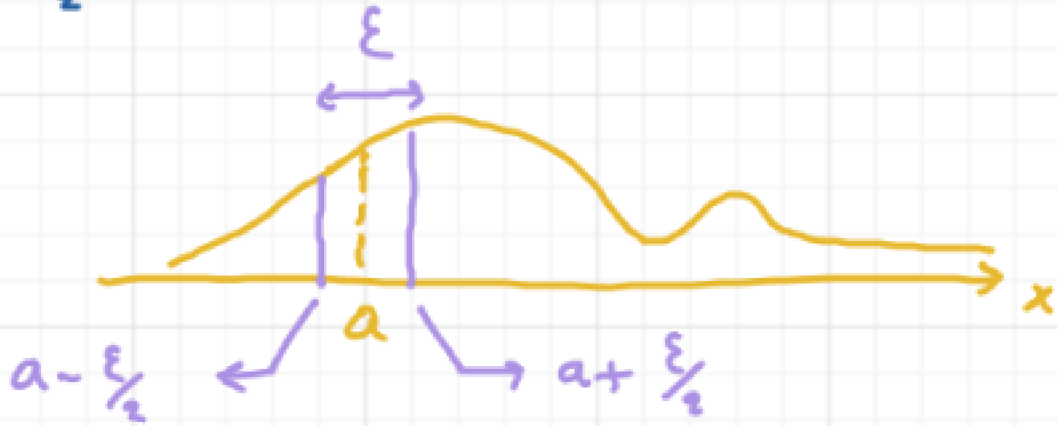
• تعبیر دیگری در مورد تابع چگالی احتمال:

واقعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{P}[a - \varepsilon/2 \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}]$$

اگر ε کوچک باشد داریم:

$$= \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} f_X(x)\,dx \simeq \varepsilon \cdot f_X(a)$$



$\Leftarrow$ f_X چگالی در واحد طول و نحوه توزیع شدن احتمال را نشان می‌دهد.

• به بیان دیگر می‌توان f_X را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f_X(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P[a-\varepsilon/2 \leq X \leq a+\varepsilon/2]}{\varepsilon}$$

• به طور خلاصه (برخی از خواص تابع چگالی احتمال):

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

② $$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

می دانیم تابع $F_X(x)$ غیر نزولی است

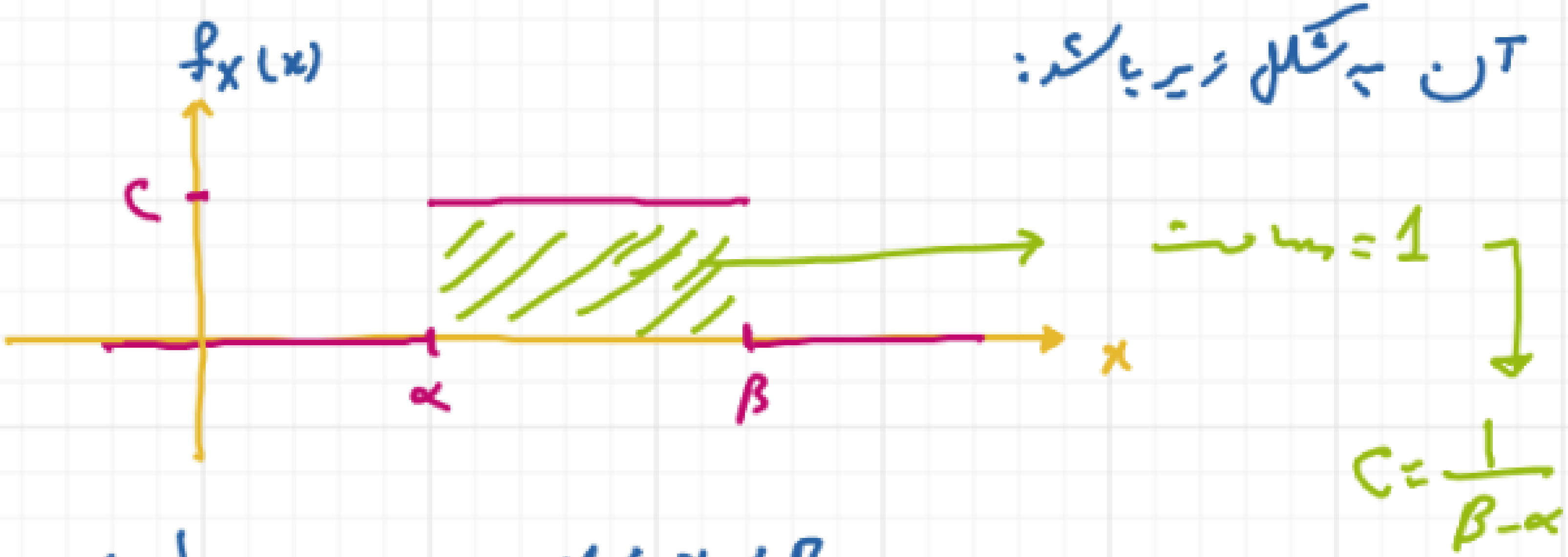
③ $$f_X(x) \geq 0$$

---

* معرفی برخی از متغیرهای تصادفی پیوسته پرکاربرد :

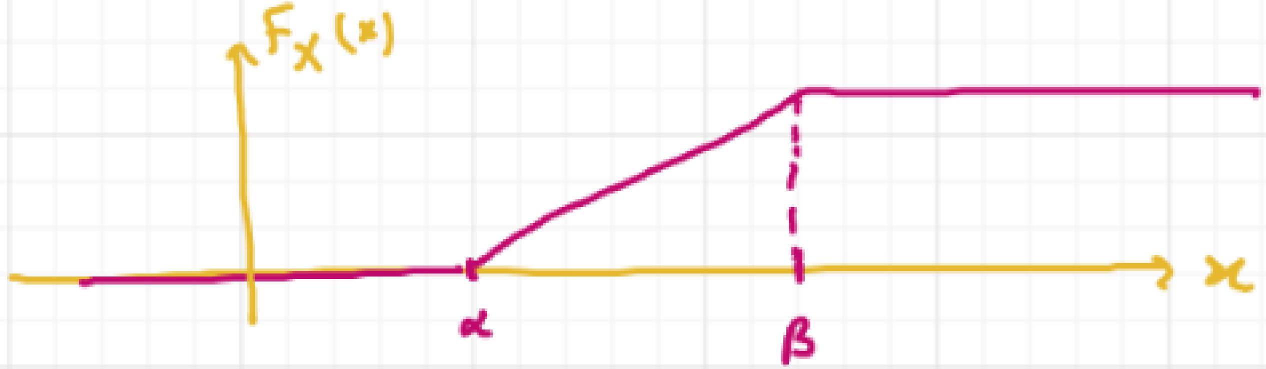
• متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت :

متغیر تصادفی X توزیع یکنواخت در بازه (α, β) دارد اگر که تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد:



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & : \quad \alpha < x < \beta \\ 0 & : \quad \text{o.w.} \end{cases}$$

با توجه به f_X برای cdf متغیر تصادفی یکنواخت داریم:

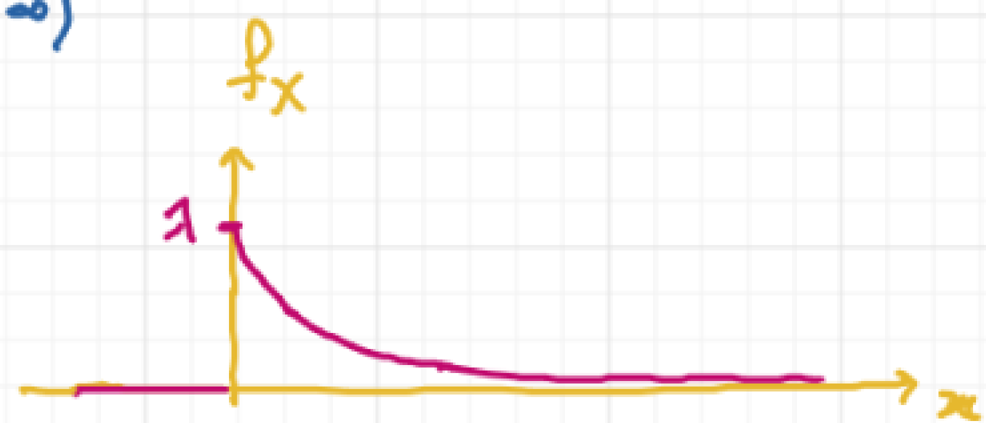


$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & : \quad x\leqslant\alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & : \quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta \\ 1 & : \quad x\geqslant\beta \end{cases}$$

• متغیر تصادفی با توزیع نمایی (با پارامتر $\lambda>0$):

$$X\sim \exp(\lambda) \implies X\in[0,+\infty)$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \quad x\geqslant 0 \\ 0 & : \quad x<0 \end{cases}$$

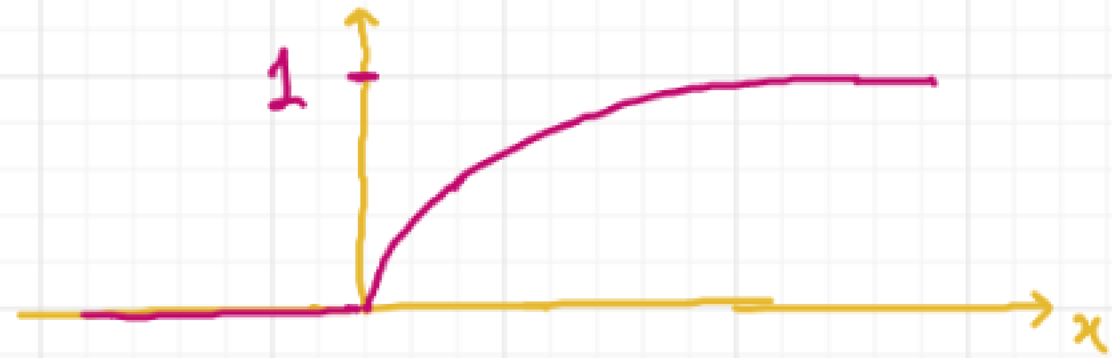


$$\Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_0^x \lambda e^{-\lambda\alpha}\,d\alpha = -e^{-\lambda\alpha}\Big]_0^x$$

$x\geqslant 0$

F_X

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$



• مثال: فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y=\min[X_1,X_2]$ تعریف می‌کنیم.
ثابت کنید Y توزیع نمایی با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ دارد.

حل با روش اول:

$$1 - F_Y(y) = \mathbb{P}[Y > y] = \mathbb{P}[\min[X_1, X_2] > y]$$

$$= \mathbb{P}[X_1 > y , X_2 > y]$$

$$\xrightarrow{X_1 \perp X_2} = \mathbb{P}[X_1 > y] \cdot \mathbb{P}[X_2 > y]$$

$$= e^{-\lambda_1 y} \cdot e^{-\lambda_2 y}$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) y$$

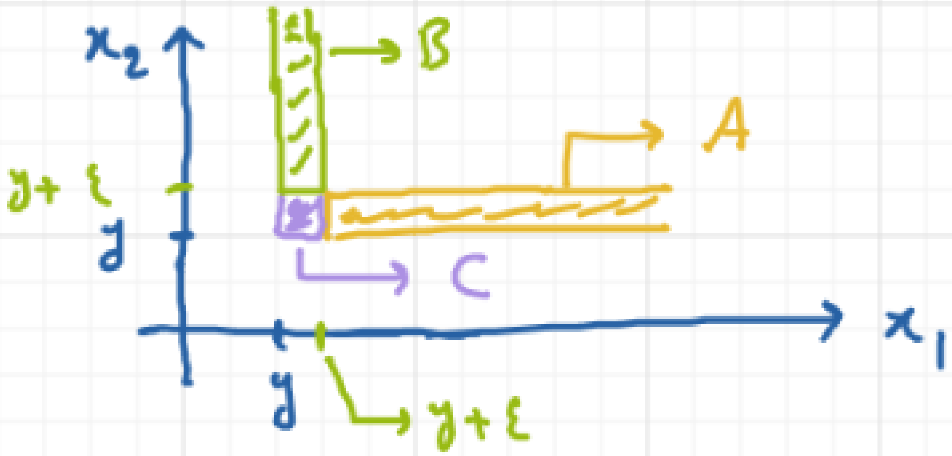
$$= e$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}$$

که این تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی است با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$.

حل با روش دوم:

$$f_Y(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}[y \leq Y \leq y+\varepsilon]}{\varepsilon}$$



$$\Rightarrow \{y \leq Y \leq y+\varepsilon\} = A \cup B \cup C$$

و می دانیم:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[y \leq Y \leq y+\varepsilon] = \mathbb{P}[A \cup B \cup C]$$

$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C]$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C]}{\varepsilon}$$

از طرفی برای احتمال‌های وقایع A, B, C داریم :

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\, y \leq X_1 \leq y+\varepsilon , \quad X_2 > y+\varepsilon \,]$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}[\, y \leq X_1 \leq y+\varepsilon \,]}_{\simeq\, \varepsilon \cdot f_{X_1}(y)} \; \underbrace{\mathbb{P}[\, X_2 > y+\varepsilon \,]}_{=\, e^{-\lambda_2 (y+\varepsilon)}}$$

$$= \varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}$$

$$\simeq \varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 (y+\varepsilon)}$$

به طور مشابه برای A :

$$\mathbb{P}[A] = \varepsilon \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot e^{-\lambda_1 (y+\varepsilon)}$$

و برای واقعه C :

$$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[\, y \leqslant X_1 \leqslant y+\varepsilon \,,\, y \leqslant X_2 \leqslant y+\varepsilon \,]$$

$$= \mathbb{P}[\, y \leqslant X_1 \leqslant y+\varepsilon \,] \cdot \mathbb{P}[\, y \leqslant X_2 \leqslant y+\varepsilon \,]$$

$$\simeq \varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \cdot \varepsilon \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

$y \geqslant 0$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 (y+\varepsilon)} + \overbrace{\text{-----}}^{= \mathbb{P}[A]} + \varepsilon^2 \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y}}{\varepsilon}$$

$$= \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}$$

$$= (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} \quad : \quad y \geq 0$$

این تابع چگالی احتمال توزیع نمایی با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$. ✓

• کاربردهای توزیع نمایی :

① مثلا طول عمر برقی ادوات الکترونیکی (مثلا عمر CPU ، RAM و ...)

② میزان معطل شدن در صف های مختلف (مثلا صف رستوران ، صف یک وب سرور صف یک مسیریاب و .....)

• فرض کنید X میزان انتظار در صف یک رستوران باشد (فرض : X نمایی است)

و فرض کنید که به اندازه s ثانیه صبر کرده ایم و هنوز نوبت ما نشده ← $X > s$

سوال : احتمال اینکه به اندازه t ثانیه بیشتر صبر کنیم و نوبت ما نشود چقدر است ؟

$$\mathbb{P}[X > s+t \mid X > s] = \frac{\mathbb{P}[X > s+t , X > s]}{\mathbb{P}[X > s]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[X > s+t]}{\mathbb{P}[X > s]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}[X>t]$$

← احتمال اینکه به اندازه t ثانیه بیشتر صبر کنیم و نوبت ما نشود به این ربطی ندارد
که قبلا چقدر صبر کرده بودیم.

این همان خاصیت بدون حافظه بودن است که در مورد توزیع هندسی دیده بودیم.

- در مورد ادوات الکترونیکی این خاصیت به این معنی است که احتمال اینکه وسیله ما یک روز بیشتر کار کند ربطی ندارد به اینکه قبلا مثلا یک سال کار کرده یا نو باشد.