آمار و احتمال مهندسی، جلسه 18: شنبه 24 اردیبهشت 1401

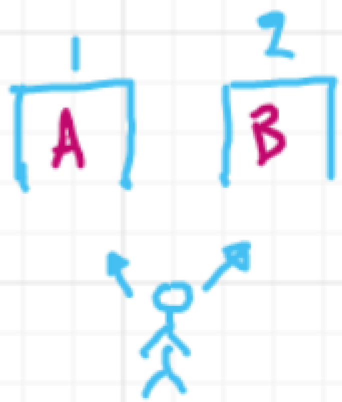
---

* ادامه بحث معرفی برخی از متغیرهای تصادفی پیوسته پرکاربرد
  - یک مثال از متغیر تصادفی نمایی
  - متغیر تصادفی با توزیع گوسی یا نرمال
* امید ریاضی برای متغیرهای پیوسته
  - امید ریاضی یک تابع از یک متغیر تصادفی پیوسته
  - مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی برای متغیرهای گسسته و پیوسته
* واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

- مثال: فرض کنید شما وارد بانکی می‌شوید که دو باجه دارد و دو مراجعه‌کننده در باجه‌ها مشغول انجام کارشان هستند. بنابراین به محض اینکه یکی از باجه‌ها خالی شود به آن باجه می‌روید و کارتان را شروع می‌کنید. فرض کنید که هر مراجعه‌کننده در باجه‌ای می‌ماند برابر با توزیع نمایی با پارامتر λ باشد و از زمان انتظار بقیه افراد مستقل باشد.

در این صورت از میان سه نفر احتمال اینکه C نفر آخری باشد که بانک را ترک می‌کند

چقدر است؟



راه حل: شما باید منتظر شوید که نفر A یا B کارشان تمام شود و

وارد باجه شوید. الان باید ببینیم کار کدام بیشتر طول می‌کشد

یا نفر باجه دیگر. چون توزیع نمایی است و بدون حافظه، مهم نیست نفر قبلی چقدر

قبل از شما در باجه منتظر بوده. ← انگار همزمان شروع کرده‌اند. به علت تقارن احتمال

اینکه کار شما بیشتر طول بکشد $\frac{1}{2}$ است.

• متغیر تصادفی با توزیع گاوسی (نرمال): $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

می‌گوییم متغیر تصادفی X توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 دارد اگر که تابع

چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad : x \in (-\infty, +\infty)$$

شکل نمودار تابع چگالی احتمال:

$f(x)$

• برخی از خواص و کاربردهای توزیع گاوسی

① نویز در سیستم های مخابراتی

② توزیع سرعت مولکول های یک گاز

③ رفتار آماری جوامع بزرگ

این توزیع در طبیعت زیاد مشاهده می‌شود ←

④ از نظر محاسباتی رفتار خوبی دارد.

⑤ جمع دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع های گاوسی، گاوسی می شود.

⑥ دو متغیر تصادفی نا همبسته گاوسی مستقل هم هستند.

(دو متغیر تصادفی گاوسی مستقل هستند اگر و فقط اگر ناهمبسته باشند)

⑦ قضیه حد مرکزی (Central Limit Thm.):

به نحوی جمع رفتارهای تصادفی (نسبتا) مستقل به شکل توزیع گاوسی در می آیند.

نتیجه: اگر که $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ و تعریف کنیم:

$$y = \alpha X + \beta$$

$$\underbrace{\alpha,\ \beta}_{\text{دو عدد ثابت}} \in \mathbb{R}$$

y هم توزیع گاوسی دارد. یعنی: $y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ باشد:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[\alpha X + \beta \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}\right]$$

از طرف دیگر $= \int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\,dz$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$z = \alpha x + \beta$

$$= \int^{y} \frac{1}{\quad} e^{-\frac{\left(\frac{z-\beta}{\alpha} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\alpha}\,dz$$

$$\int_{-\infty} \quad \frac{\quad}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\sigma^2}}\, e^{-\frac{(z-(\alpha\mu+\beta))^2}{2\alpha^2\sigma^2}}}^{f_Y(y)}}_{N(\alpha\mu+\beta,\, \alpha^2\sigma^2) \text{ تابع چگالی احتمال یک توزیع}} \, dz$$

✓ $\quad Y \sim N(\alpha\mu+\beta, \alpha^2\sigma^2) \quad \Leftarrow$

برای $\alpha<0$ هم به طریق مشابه عمل می‌کنیم.

---

* امید ریاضی متغیرهای تصادفی پیوسته:

• هدف: مانند متغیرهای تصادفی گسسته امید ریاضی را برای متغیرهای پیوسته تعریف کنیم.

• نکته: اگر امید ریاضی را تعریف کنیم ⟵ واریانس و کوواریانس و گشتاورهای متغیر تصادفی

و تابع مولد گشتاور را مانند قبل می‌توانیم تعریف کنیم؛

• یادآوری: برای متغیر گسسته X داشتیم:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}[X=x]$$

برای متغیرهای پیوسته دیدیم که $\mathbb{P}[X=x]=0$ در نتیجه این تعریف به صورت مستقیم کار نمی‌کند.

• تعریف امید ریاضی برای متغیرهای پیوسته:

به جای $\mathbb{P}[X=x]$ احتمال اینکه X در یک بازه کوچک حول x قرار گیرد را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم:

$$\mathbb{E}[X] \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_x x \cdot \underbrace{\mathbb{P}[x \leq X \leq x+\varepsilon]}_{\simeq\, \varepsilon \cdot f_X(x)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{x} x \cdot f_X(x)\, \varepsilon$$

در حد و با توجه به اینکه در کلیه مقادیر $\mathbb{R}$ را می‌تواند به صورتش میگیرد،

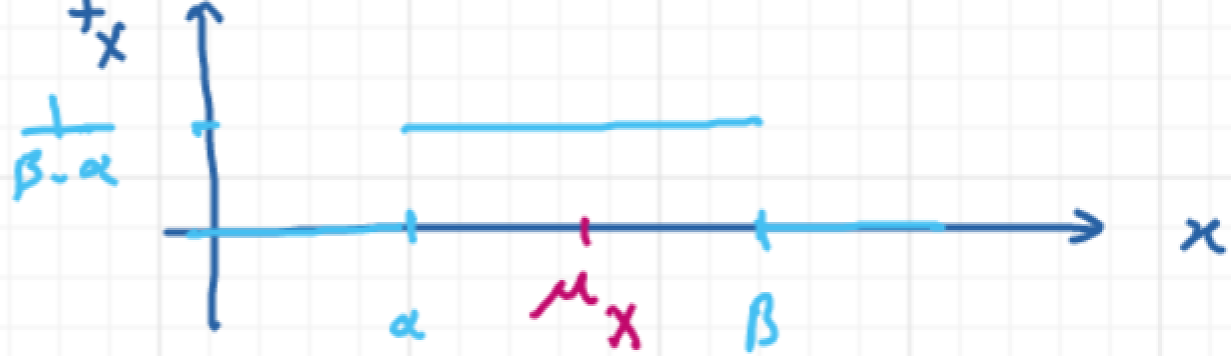
مرکز جرم تابع چگالی احتمال :
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) \cdot dx$$

• امید ریاضی متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت ؛ $X \sim U(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & : \alpha < x < \beta \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{1}{\beta-\alpha}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$



$$\mu_X = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

• امید ریاضی متغیر تصادفی با توزیع نمایی:

$X \sim \exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}\, dx}_{=dv}$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = -e^{-\lambda x} \end{cases}$$

انتگرال گیری جزء به جزء :

$$\int^{\beta} u\,dv = uv \Big]^{\beta} - \int^{\beta} v\,du$$

Integration by Part

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = -x \cdot e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -0 - (-0) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad \checkmark$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ امید ریاضی یک متغیر تصادفی با توزیع گاوسی:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{f_X(x)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu + \mu)\, \overline{\cdots\cdots\cdots}\,dx$$

$= f_X$

$y = x - \mu$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{(x-\mu)}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{y}_{\text{تابع فرد}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{\text{تابع زوج}} dy + \mu$$

← بازه انتگرال‌گیری متقارن حول صفر

$$= 0 + \mu = \mu \quad \checkmark$$

• امید ریاضی یک تابع از یک متغیر تصادفی پیوسته:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد.

متغیر تصادفی Y را به صورت $Y=g(X)$ از روی X می‌سازیم.

(فرض: Y هم یک متغیر تصادفی پیوسته است)

برای محاسبه امید ریاضی Y می‌توانیم به دو طریق عمل کنیم:

① تابع چگالی احتمال f_Y را بیابیم و از تعریف استفاده کنیم:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

② مانند متغیرهای گسسته می‌توانیم بنویسیم (بدون اثبات):

$$\mathbb{E}_{\sim f_Y}[Y] = \mathbb{E}_{\sim f_X}[g(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

• به عنوان مثال گشتاورهای متغیر تصادفی X را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

گشتاور kام X :
$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx$$

• برای تابع مولد گشتاور:

9

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$$

• نکته: عملگر امید ریاضی خطی است (همانند تحلیل برای متغیرهای گسسته):

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta) f_X(x)\,dx$$

$$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx}_{=\mathbb{E}[X]} + \beta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{=1}$$

$$= \alpha \mathbb{E}[X] + \beta$$

• به طور مشابه نامساوی جنسن هم برقرار است.