-6192-6205

آمار و احتمال مهندسی، جلسه 19: دوشنبه 26 اردیبهشت 1401

---

* ادامه بحث امید ریاضی متغیرهای پیوسته

• مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی برای متغیرهای گسسته و پیوسته

* واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

* متغیرهای تصادفی پیوسته با توزیع مشترک

* امید ریاضی تابعی از چند متغیر تصادفی

* مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی برای متغیرهای گسسته و پیوسته (حالت دو متغیره)

• مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی حالت گسسته و پیوسته

گسسته	پیوسته
تابع جرم احتمال: $\mathbb{P}[X=x] \geq 0$	تابع چگالی احتمال: $\underbrace{f_X(x)}_{=\frac{d}{dx}F_X(x)} \geq 0$

$$\sum_{x} \mathbb{P}[X=x]=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$$

$$\mathbb{P}[X\in A]=\sum_{x\in A}\mathbb{P}[X=x] \qquad \mathbb{P}[X\in A]=\int_{A} f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}[X]=\underbrace{\sum_{x} x\,\mathbb{P}[X=x]}_{\text{مرکز جرم تابع جرم احتمال}} \qquad \mathbb{E}[X]=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx}_{\text{مرکز جرم تابع چگالی احتمال}}$$

$$\mathbb{E}[g(X)]=\sum_{x} g(x)\,\mathbb{P}[X=x] \qquad \mathbb{E}[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx$$

---

* واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته:

• واریانس مشابه حالت گسسته به صورت زیر برای یک متغیر تصادفی پیوسته تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Var}[X] \triangleq \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right], \quad \mu_X \triangleq \mathbb{E}[X]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+\mu_X^2 - 2x\mu_X) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx}_{=1} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx}_{=E[X]=\mu_X}$$

$$= E[X^2] - \mu_X^2$$

مشابه رابطه گسسته :

• یادآوری: امید ریاضی یک عملگر خطی است چون جمع و انتگرال خطی هستند.

• واریانس متغیر تصادفی گاوسی :

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\sigma^2 \longrightarrow ?$

$\mu \longrightarrow$ امید ریاضی

$-(x-\mu)^2$

192-6205

$$f_X(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{=c}\, e^{\frac{\quad}{2\sigma^2}}$$

Conn
Pleas

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$= c\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow$$

$$= c\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \sigma\, dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{y}_{=u} \cdot \underbrace{y\, e^{-y^2/2}\, dy}_{=dv}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = y \\ v = -e^{-y^2/2} \end{cases}$$

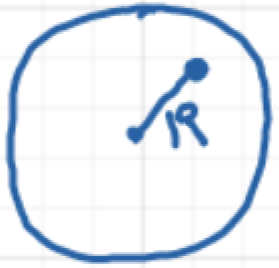
$$= \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[\, y\, e^{-y^2/2} \,\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy}_{\quad}$$

مسافت ... تا

به‌جای امثال $N(0,1)$

$= \sigma^2$ ✓

• مثال: فرض کنید یک نقطه را به صورت یکنواخت از دایره‌ای به شعاع 1 انتخاب می‌کنیم و R نشان دهنده فاصله نقطه انتخاب شده تا مرکز دایره است.



$R \in [0,1]$

① محاسبه $f_R(r) = ?$

② $\mathbb{E}[R] = ?$

③ $var[R] = ?$

محاسبه pdf راه اول: $R \in [0,1] \leftarrow f_R(r) = 0$ برای $r \notin [0,1]$

با فرض $0 \leqslant r \leqslant 1$:

$$f_R(r) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\overbrace{P[r-\epsilon/2 \leqslant R \leqslant r+\epsilon/2]}^{=A}}{\epsilon}$$

$$\lim \frac{1}{\ldots} \quad \pi(r+\epsilon/2)^2 - \pi(r-\epsilon/2)^2$$

6192-6205

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ }{\varepsilon} \quad \frac{\ }{\pi \cdot 1^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2r\varepsilon}{\varepsilon} = 2r$$

محاسبه pdf را داریم:

ابتدا CDF متغیر R را محاسبه می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$F_R(r) = \mathbb{P}[R \leq r] = \begin{cases} 0 & : r < 0 \\ \dfrac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2 & : 0 \leq r \leq 1 \\ 1 & : r > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_R(r) = \frac{d}{dr} F_R(r) = \begin{cases} 2r & : 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$

محاسبه امید ریاضی:

$$\mathbb{E}[R] = \int_{-\infty}^{+\infty} r \, f_R(r) dr = \int_0^1 r \cdot 2r \cdot dr$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

محاسبه گشتاور دوم R:

$$\mathbb{E}[R^2] = \int_0^1 r^2 \cdot 2r \cdot dr = 2 \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big]_0^1 = 1/2$$

محاسبه واریانس

$$\mathrm{Var}[R] = \mathbb{E}[R^2] - (\mathbb{E}[R])^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

---

* متغیرهای تصادفی پیوسته با توزیع مشترک:

• قبلاً در مورد تعریف چند متغیر تصادفی بر روی یک فضای نمونه صحبت کرده بودیم.

• مثال:

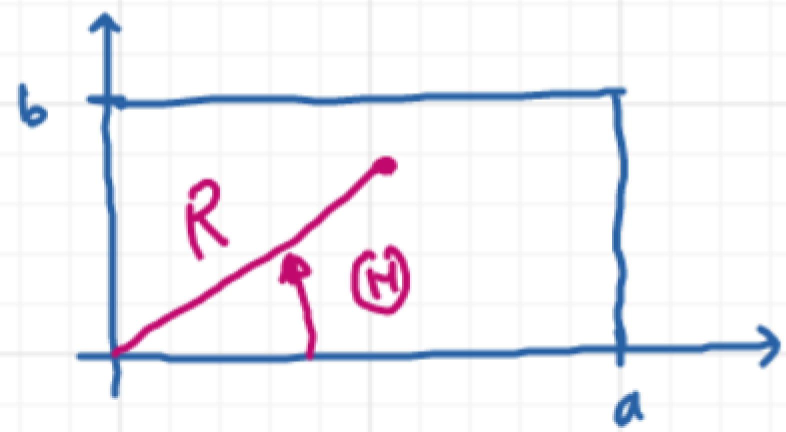
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le a \;,\; 0 \le y \le b\}$$

2-6205

$X(\omega)$ a

مثلا متغیرهای X و Y را به عنوان مختصات نقطه تصادفی انتخاب شده در نظر می‌گیریم.

برای همین مثال می‌توانیم مثلا از مختصات قطبی برای نقطه ω استفاده کنیم و دو متغیر R و Θ تعریف کنیم.



همان آزمایش تصادفی است ولی با R و Θ به نحو دیگری فضای نمونه را اندازه‌گیری (measure) می‌کنیم.

• برای توصیف مشترک دو (یا چند) متغیر تصادفی باید توزیع مشترک آنها را در نظر بگیریم.

یک راه استفاده از تابع CDF مشترک آنهاست (که این راه کلی است و برای همه انواع متغیرهای تصادفی کار می‌کند):

$$F_{X,Y}(x,y) \triangleq \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \quad : \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

• یادآوری حاشیه‌سازی:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x, Y < \infty]$$

$$= \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,+\infty)$$

به طور مشابه:

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$$

• برای تعداد بیشتری متغیر:

$$F_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = F_{X_1 \cdots X_5}(x_1, +\infty, x_3, +\infty, +\infty)$$

• متغیرهای مشترکاً پیوسته:

متغیرهای X و Y مشترکاً پیوسته هستند اگر که تابع توزیع تجمعی مشترک آنها پیوسته باشد.

• تابع چگالی احتمال مشترک:

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مشترکا پیوسته باشند، آنگاه تابع نامنفی $f_{XY}(x,y)$ وجود دارد که برای هر زیر مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^2$ از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathbb{P}[X \in A] = \underbrace{\iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{\text{حجم زیر نمودار pdf روی مجموعه } A}$$

به f_{XY} تابع چگالی احتمال مشترک می‌گوییم.

• برای تعداد بیشتر متغیرهای تصادفی مشترکا پیوسته تابع چگالی احتمال مشترک به صورت مشابه تعریف می‌شود.

• حاشیه سازی با استفاده از تابع چگالی احتمال:

$\forall A \subseteq \mathbb{R}:$

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f_X(x)\,dx$$

$$= \mathbb{P}[X \in A,\ Y \in (-\infty, +\infty)]$$

از طرف دیگر:

$$= \int_A \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy}\, dx$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy$$

به طور مشابه:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

• حاشیه‌سازی برای بیشتر از دو متغیر تصادفی:

$$f_{X_1 X_3}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 \cdots X_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\, dx_2\, dx_4\, dx_5$$

• رابطه توزیع تجمعی و چگالی احتمال برای چند متغیر تصادفی مشترکاً پیوسته:

$$F_{XY}(a,b) = \mathbb{P}[X \leq a, Y \leq b]$$

با استفاده از تعریف f_{XY}

$$= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

با مشتق گیری از طرفین $\Rightarrow$

$$f_{XY}(a,b) = \frac{\partial^2 F_{XY}(a,b)}{\partial a\, \partial b} = \frac{\partial^2 F_{XY}(a,b)}{\partial b\, \partial a}$$

• برای متغیر های مشترک پیوسته داشتیم CDF مشترک یا PDF مشترک معادل هستند.