

- * اندازه بحث متغیرهای مقادیری پیوسته با متوزیع مشترک
- * امید ریاضی تابعی از چند متغیر مقادیری پیوسته
- * مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی برای متغیرهای گسسته و پیوسته (حالت دو متغیره)
- * چند مثال

- * احتمال شرطی برای متغیرهای پیوسته
- * متغیر احتمال کل برای متغیرهای مقادیری پیوسته

- * تعبیر دیگری برای تابع چگالی احتمال مشترک:
- مشابه حالت تک متغیر احتمال واقع شری را در تقاضی گیریم:

$$P\left[a - \frac{\epsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\epsilon}{2} \text{ و } b - \frac{\epsilon}{2} \leq Y \leq b + \frac{\epsilon}{2}\right]$$

واقعه A

با فرض کوچک بودن ϵ

$$= \int_{a - \frac{\epsilon}{2}}^{a + \frac{\epsilon}{2}} \int_{b - \frac{\epsilon}{2}}^{b + \frac{\epsilon}{2}} f_{X,Y}(x,y) dx dy \approx \epsilon^2 \cdot f_{X,Y}(a,b)$$

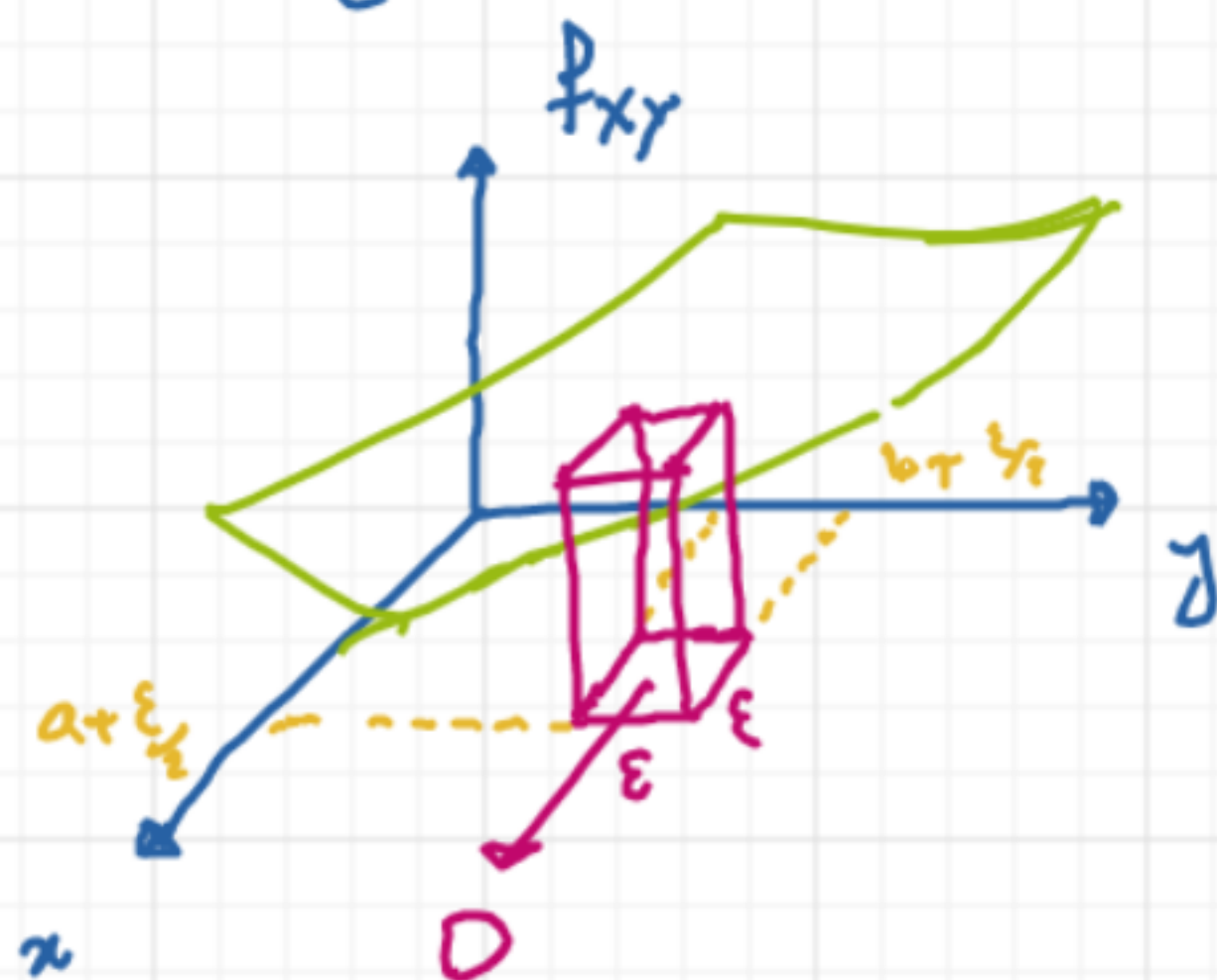
تقریب تابع
چگالی احتمال
مشترک

$$a - \frac{\epsilon}{2} \quad b - \frac{\epsilon}{2}$$

• درشتی برای f_{xy} و توان نوشت:

$$f_{xy}(a,b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[a - \frac{\epsilon}{2} < X < a + \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2} < Y < b + \frac{\epsilon}{2}]}{\epsilon^2}$$

$$P[(X,Y) \in D] \simeq \epsilon^2 f_{xy}(a,b)$$



* امید ریاضی تابعی از چند متغیر تصادفی پیوسته:

یعنی x, y متغیر تصادفی پیوسته هستند.

$$E[g(X,Y)] = \int \int g(x,y) f_{xy}(x,y) dx dy$$

$$W = g(X, Y) \quad \text{و بعد}$$

← W یک متغیر تصادفی جدید (غرضی کنیم W یک متغیر تصادفی پیوسته باشد).

هدف: یافتن امید ریاضی W :

① راه اول: تابع چگالی f_W ، ابتدا باید و بعد $E[W]$ را محاسبه کنیم

$$E[W] = \int_{-\infty}^{+\infty} w f_W(w) dw$$

② راه دوم (بدون اثباتی پذیریم):

$$E_{\sim f_W}[W] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$= E_{\sim f_{X,Y}}[g(X, Y)]$$

مثال: فرض کنیم $g(x, y) = x + y$ و متغیرهای X و Y پیوسته باشند.

در نتیجه $W = X + Y$ داریم:

$$\underset{\sim f_W}{\mathbb{E}[W]} = \underset{\sim f_{XY}}{\mathbb{E}[X+Y]}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f_{XY}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy \right)}_{= f_X(x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx \right)}_{= f_Y(y)} dy$$

$$= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad \checkmark$$

• قبلہ ہم ثابت کر رہے ہیں کہ $\mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta$

بائیں جانب دو راہوں پر لا کر حالت کلی سے دار ہیں :

$$\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + B]$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}[X_i] + \beta$$

این رابطه را قبلاً برای متغیرهای گسسته نیز اثبات کردیم.
در حالت کلی برای همه انواع متغیرهای ستیادنی برقرار است.
⇐ امید ریاضی یک نگار خطی است.

* مقایسه روابط احتمال و امید ریاضی برای متغیرهای گسسته و پیوسته (حالت دو متغیره):

گسسته

$$P[X=x, Y=y] \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y P[X=x, Y=y] = 1$$

$$P[X=x] = \sum_y P[X=x, Y=y]$$

$$P[(X, Y) \in A] = \sum P[X=x, Y=y]$$

پیوسته

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$\mathbb{E}[g(x, y)] =$$

$$\sum_x \sum_y g(x, y) P[X=x, Y=y]$$

$$\mathbb{E}[g(x, y)] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{xy}(x, y) dx dy$$

* مثال: یک نقطه را به صورت یکگزاف داخل دایره‌ای به شعاع واحد انتخاب می‌کنیم.

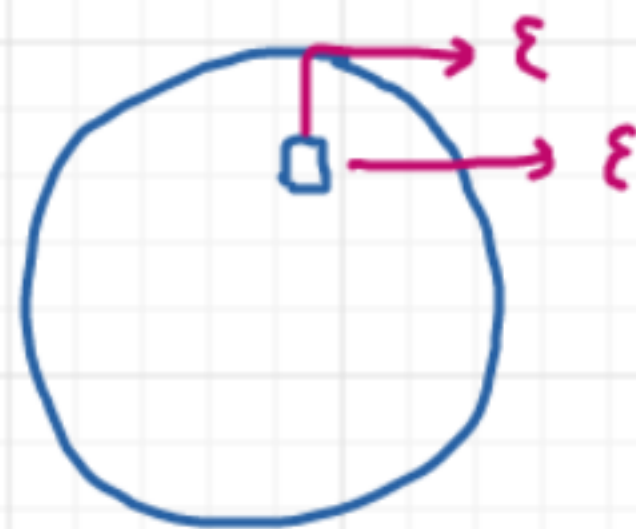
برکز مختلف را مرکز دایره می‌گیریم و مختصات نقطه انتخاب شده را با متغیرهای

مختصات x و y نشان می‌دهیم.

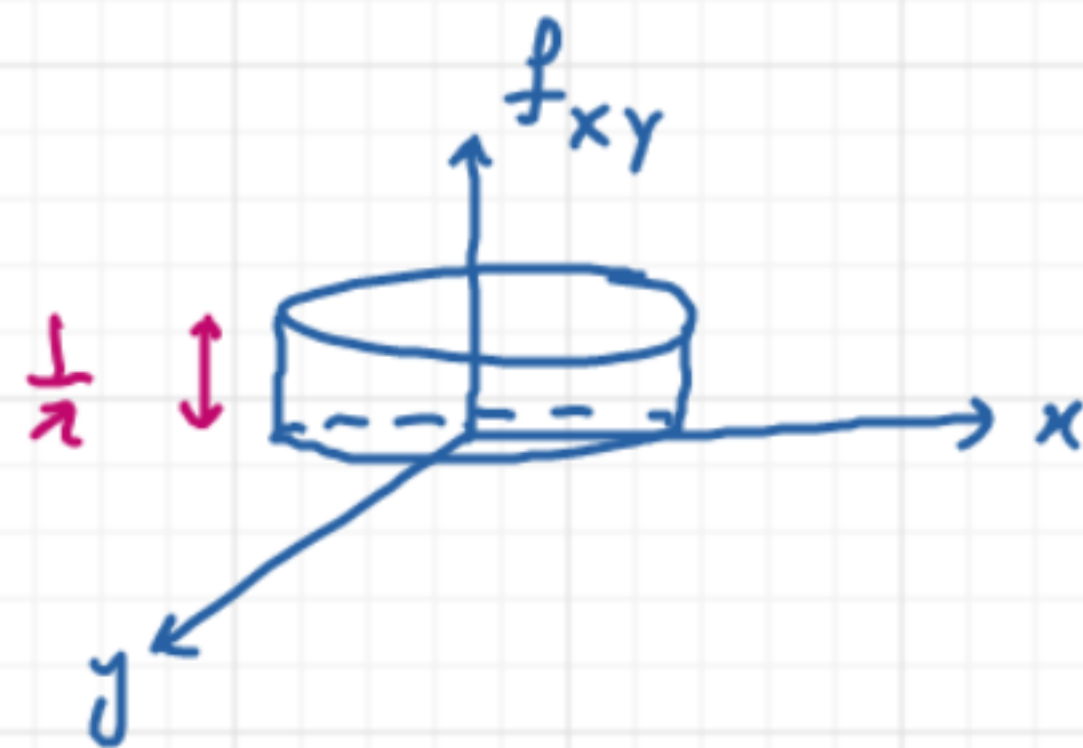
تا چه جایی احتمال مرکز x, y چیست؟

$$f_{xy}(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X \leq x+\epsilon, y \leq Y \leq y+\epsilon]}{\epsilon^2}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\epsilon^2}{\pi \cdot 1^2}}{\epsilon^2} : \text{برای نقاط } (x, y) \text{ داخل دایره}$$



$$= \frac{1}{\lambda}$$



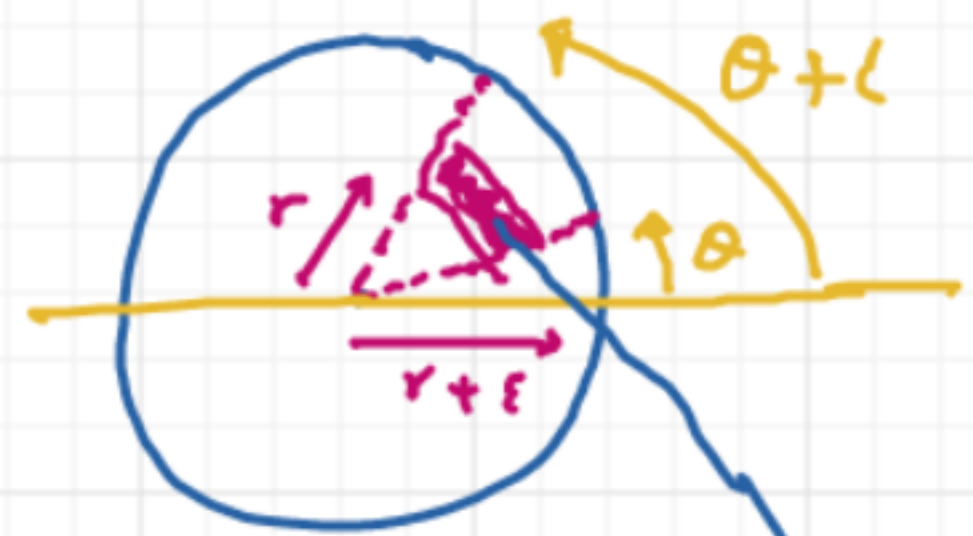
$$\Rightarrow f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & : \text{داخل دایره } (x, y) \\ 0 & : \text{دخیر این صورت} \end{cases}$$

* ادامه مثال قبل: حال به بای X و Y از متغیرهای شعاعی R و Θ که بایین دایره حاصل
نقطه نامیدا و تراویه نقطه از محور X هسته استواران کنیم.

سوال: تابع چگالی افعال متشک R و Θ را بیابید.

راه اول: از تغییر چگالی افعال متشک استواران کنیم:

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[r \leq R \leq r + \epsilon, \theta \leq \Theta \leq \theta + \epsilon]}{\epsilon^2}$$



مساحت تابه هائیکه دره $\approx r \Delta r \Delta \theta$
 $r \Delta r \Delta \theta = r \epsilon^2$

$$\Rightarrow f_{R(\omega)}(r, \theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{r \epsilon^2}{2 \cdot 1^2}}{\epsilon^2}$$

$$= \frac{r}{2}$$

برای نقاط داخل دایره :



$$0 < r < 1$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$\Rightarrow f_{R(\omega)}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{r}{2} & : 0 < r < 1 \\ & : 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$

راه دوم: ابتدا معادله تابع توزیع تجمعی

$$F_{R(\omega)}(r, \theta) = P[R \leq r, \omega \leq \theta]$$

$$= \frac{\lambda r^2 \cdot \frac{\Theta}{2\lambda}}{\lambda \cdot 1} = \frac{\Theta r^2}{2\lambda}$$



$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \Theta \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow F_{R(\omega)} = \begin{cases} 0 & : r < 0 \leq \Theta < 0 \\ \frac{\Theta r^2}{2\lambda} & : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \Theta \leq 2\pi \\ r^2 & : 0 \leq r \leq 1, \Theta \geq 2\pi \rightarrow P[R \leq r, \omega \leq \Theta] \\ \frac{\Theta}{2\pi} & : r \geq 1, 0 \leq \Theta \leq 2\pi = P[R \leq r] \\ 1 & : r \geq 1, \Theta \geq 2\pi \end{cases}$$

برای پیدا کردن $f_{R(\omega)}$ از رابطه ی لایبنت به r و Θ مشتق بگیریم:

$$f_{R(\omega)}(r, \Theta) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} F_{R(\omega)}(r, \Theta)$$

$$= \frac{\lambda^2}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r^2}{2\lambda} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$= \frac{r}{\lambda}$$

$$\Rightarrow f_{R\Theta}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{r}{\lambda} & : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$

• حال که توزیع مشترک R و Θ را داریم می‌خواهیم با فاکتورسازی نتایج‌های احتمال R و Θ را بدست بیاوریم:

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R\Theta}(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\lambda} d\theta = \frac{r}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{r}{\lambda} \cdot 2\pi = 2r \quad ; \quad 0 \leq r \leq 1$$

این همان عبارتی است که طبقه قبل به صورت

مستقیم f_R است و در اینجا

$$f_{(R)}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R(r)}(r, \theta) dr = \int_0^1 \frac{r}{2} dr = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \quad : \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \rightarrow$$

در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

* مثال: فرض کنید $X \sim \text{uni}[0, 1]$ و سپس Y را به صورت یکدست در بازه $[0, X]$ انتخاب کنید.

می‌توانیم تابع چگالی احتمال مشترک f_{XY} را بیابیم.

$$f_{XY}(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X \leq x + \epsilon, y \leq Y \leq y + \epsilon]}{\epsilon^2} \quad \text{راه حل:}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\overbrace{P[x \leq X \leq x + \epsilon]}^{\approx \frac{\epsilon}{1} = \epsilon} \cdot P[y \leq Y \leq y + \epsilon \mid x \leq X \leq x + \epsilon]}{\epsilon^2}$$

برای احتمال دوم داریم $\{Y \text{ توزیع یکنواخت در بازه } [0, X] \text{ دارد}\}$:

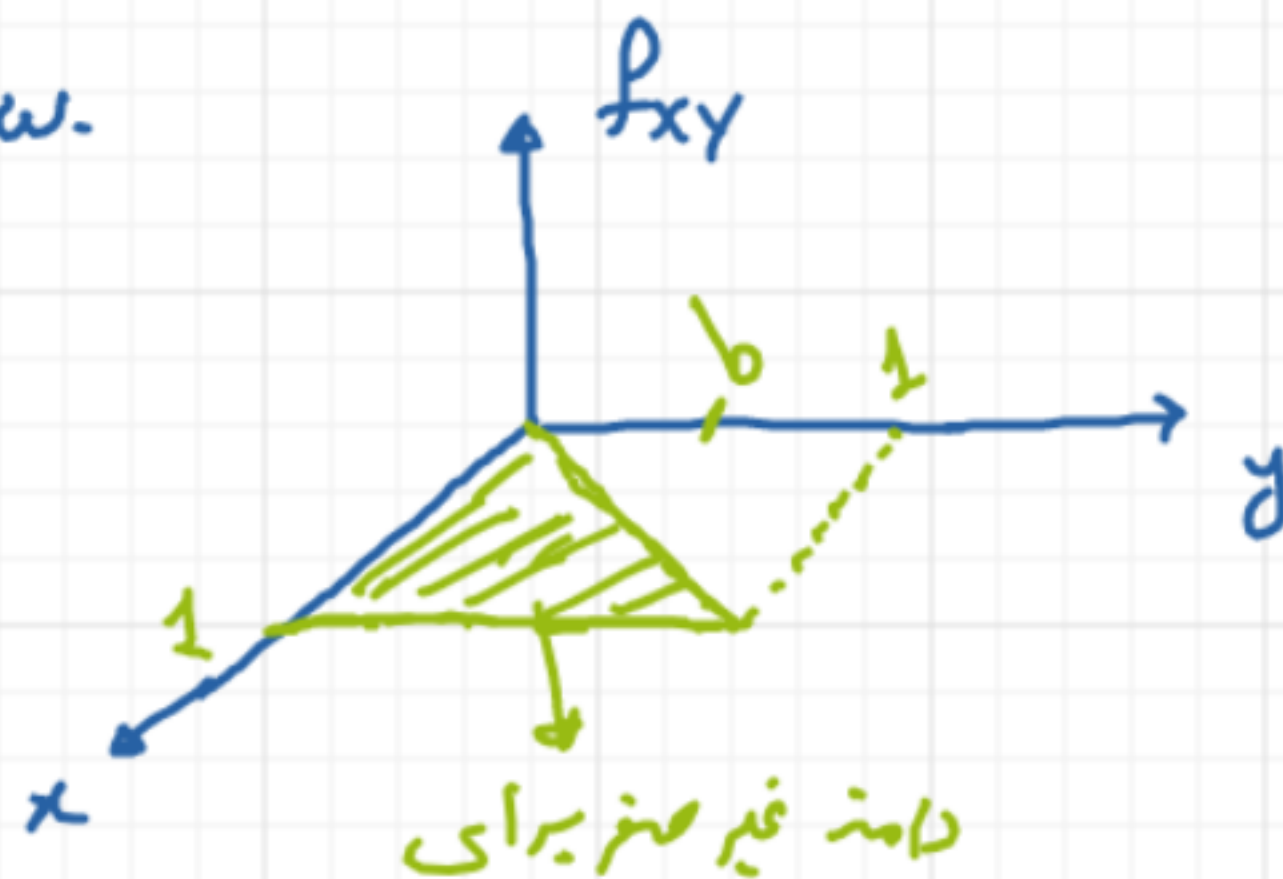
$$\frac{\varepsilon}{x+\varepsilon} \leq P[Y \leq y \leq y+\varepsilon | x \leq X \leq x+\varepsilon] \leq \frac{\varepsilon}{x}$$

که در حد عملا داریم:

$$P[Y \leq y \leq y+\varepsilon | x \leq X \leq x+\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x}$$

$$\Rightarrow f_{XY}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{x}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{x} \quad : \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & : \text{o.w.} \end{cases}$$



• حاصلی خواص f_x و f_y را بیابیم:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x} \int_0^x dy$$

$$= \frac{1}{x} \cdot x = 1 \quad : \quad x \text{ متغیر} \rightarrow 1 \leq x < \infty$$

✓ یکدلت در بازه $[0,1]$ دارد

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_y^1 = -\ln y$$

ای $y < 1$

برای اینکه متیال دین را است شود چگالی و کثیر دامت f_y نتایج چگالی احتمال درست باشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) dy = \int_0^1 -\ln y dy = -(y \ln y - y) \Big|_0^1$$

$$= -(1 \cdot \ln 1 - 1) + (0 \ln 0 - 0) = 1 \quad \checkmark$$

$$= -(1 \cdot \ln 1 - 1) + (0 \ln 0 - 0) = 1 \quad \checkmark$$
