

* یک مثال

* استقلال متغیرهای مقدارهای پیوسته

* یافتن توزیع متغیر مقدارهای $g(x)$

• یافتن تابع توزیع تجمعی

• یافتن تابع چگالی احتمال

* مثال: فرض کنید برای ارسال بیت ۰ و ۱ بر روی یک سیستم سگینال یا دلتازشی $+a$ و $-a$

ارسالی کنیم. درگیرنده یک نسخه مخلوط شده با نویز از این سگینال را دریافت می‌کنیم.

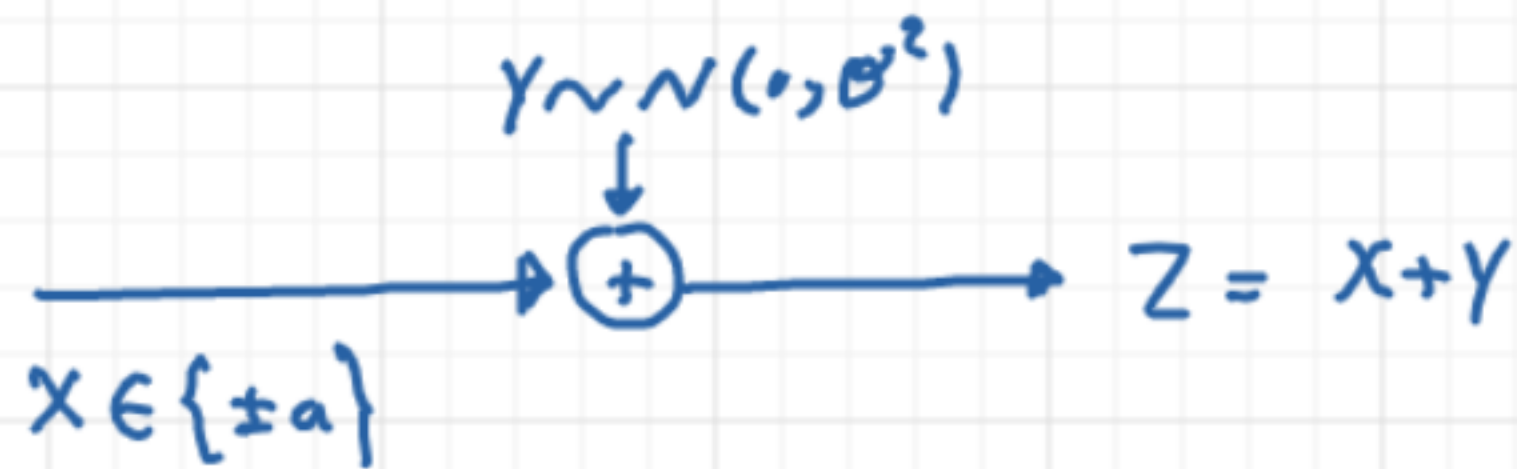
سگینال ارسال را با متغیر مقدارهای گسسته X نمایی می‌دهیم به طوری که $X \in \{\pm a\}$ و

$$P[X=a] = P[X=-a] = \frac{1}{2}$$

نویز را با متغیر مقدارهای Y مدل می‌کنیم به طوری که: $Y \sim N(0, \sigma^2)$

فرض می‌کنیم X و Y مستقل هستند و این کاتال مغایراتی X را با Y جمع می‌کنند و در نتیجه

فشاری رسد کافی: $Z = X + Y$. توزیع متغیر مقادری Z را بیابید.



$$X \perp Y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

راه حل:

مسئله را به این شکل می‌بینیم: X چه می‌دهد؟ توزیع Z را راحت می‌توان پیدا کرد:

$$f_Z(z | X = +a) : Z | X = +a \sim N(a, \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Z(z | X = -a) : Z | X = -a \sim N(-a, \sigma^2)$$

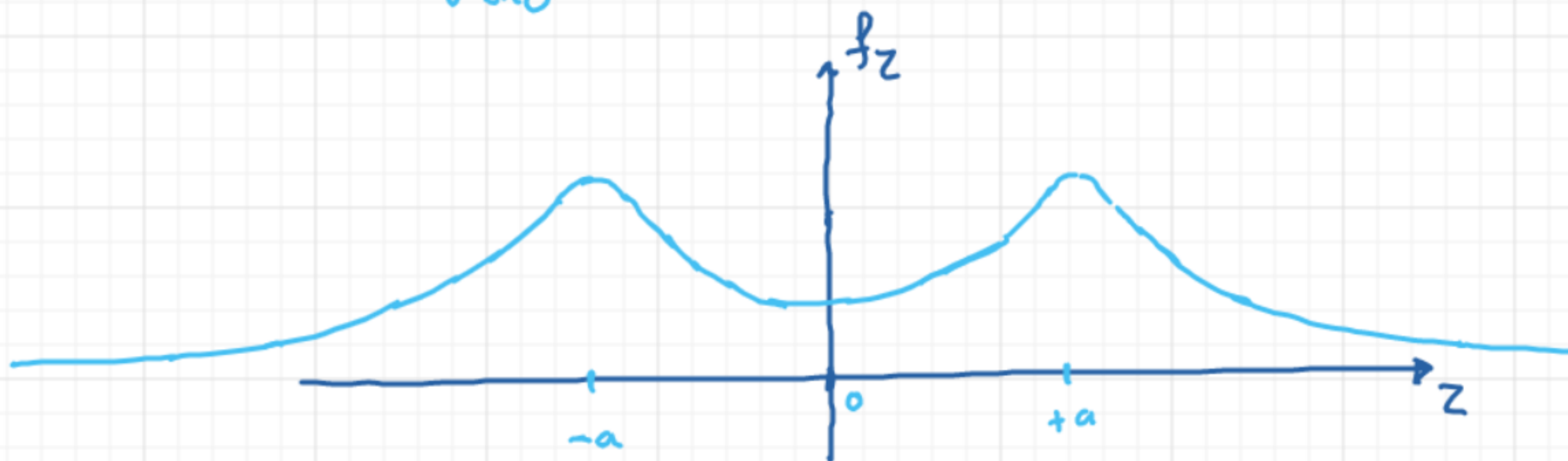
$$e^{-\frac{(y+a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

حل با استفاده از قانون احتمال کل:

$$f_Z(z) = f_Z(z | X=+a) \cdot P[X=+a] + f_Z(z | X=-a) \cdot P[X=-a]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y+a)^2}{2\sigma^2}} \right]$$



* استقلال متغیرهای مقادیر پیوسته:

5453-5153 • قبل از درک کلی استقلال متغیرهای مقادیری را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] \cdot P[Y \in B] : \forall A, B \in \mathcal{R}$$

$\Leftrightarrow$
می توان نشان داد

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) : \forall x, y \in \mathcal{R}$$

تعریف استقلال متغیرهای مقادیری در حالت کلی

برای چند متغیرهای $X_1, \dots, X_n$ استقلال به صورت زیر تعریف می شود :

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) : \forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{R}$$

• برای متغیرهای پیوسته روابط بالا شش بندی را میزنند که استقلال می توان به صورت زیر هم تعریف کرد :

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) : \forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{R}$$

اگر X و Y مستقل باشند داریم :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

توزیع X قبل
و بعد از مشاهده Y
تغییری نداشته است.

* Y متغیر تصادفی $g(X)$ به ای و متغیری که X پیوسته باشد :

• علاقه داریم توزیع $g(X)$ را به سبب توزیع X و تابع g بدست بیاوریم.

• یا متغیر تابع توزیع تابعی $g(X)$:

فرض کنید $Y = g(X)$

$$F_Y(y) = P[\underline{Y} \leq y] = P[g(X) \leq y]$$

عای $y \in \mathbb{R}$ موجود زیر است و کمتر:

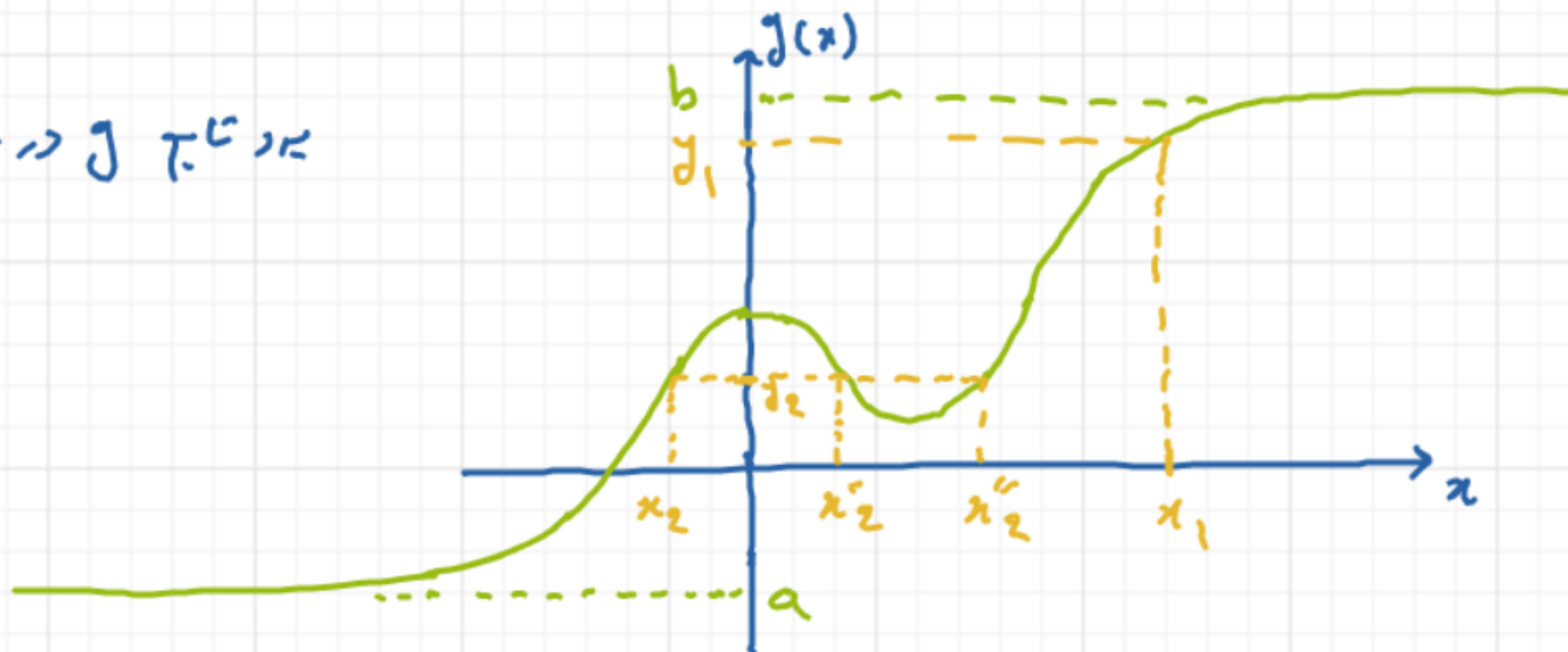
$$R_y = \{x \mid g(x) \leq y\}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = P[\underline{x} \in R_y]$$

$$\{y \leq y\} = \{x \in R_y\} \quad \text{زیرا:}$$

مثال: تابع $g(x)$ را که در شکل زیر رسم شده در نظر بگیرید:

برای تابع g در $[a, b]$



• اگر $y \geq a$ آنکه $y \leq g(x)$ برای همه x ها $\leftarrow F_Y(y) = 1$

• اگر $y < a$ آنکه هیچ x ای وجود ندارد که $g(x) < y$

$F_Y(y) = 0 \leftarrow$

• معکوس برای نقطه y_1 که داریم: $g^{-1}(y_1) = x_1$ متناهی است

$$P[Y \leq y_1] = P[X < x_1]$$

$$\Rightarrow F_Y(y_1) = F_X(x_1) = F_X(g^{-1}(y_1))$$

• برای محاسبه F_Y در نقطه y_2 داریم:

$$g^{-1}(y_2) \in \{x_2, x'_2, x''_2\}$$

$$\{Y \leq y_2\} = \underbrace{\{X \leq x_2\}}_{\uparrow} \cup \underbrace{\{x'_2 \leq X \leq x''_2\}}_{\uparrow}$$

$$\Rightarrow F_Y(y_2) = F_X(x_2) + F_X(x_2'') - F_X(x_2')$$

و به طور مشابه برای چپ نقطه F_Y را حساب کرد.

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد و $g(x) = ax + b$ یا به عبارت دیگر

$$y = ax + b$$

F_Y را حساب کنید.

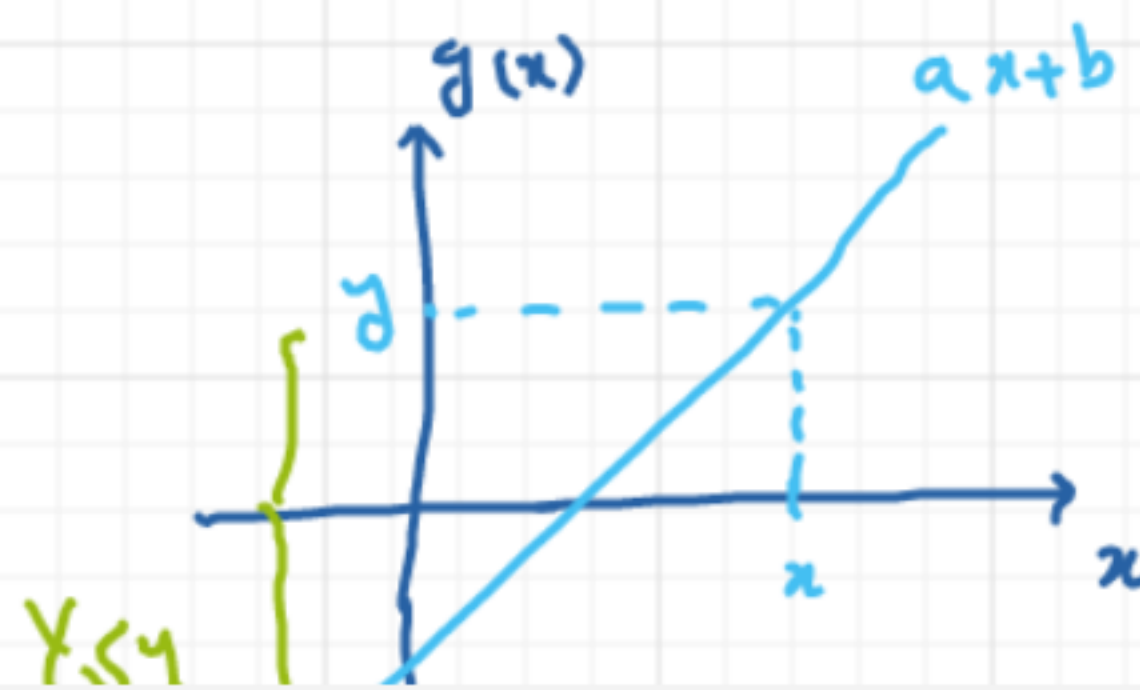
راه حل:

ابتدا فرض کنیم $a > 0$:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y]$$

$$= P[ax + b \leq y]$$

$$= P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right]$$



$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$



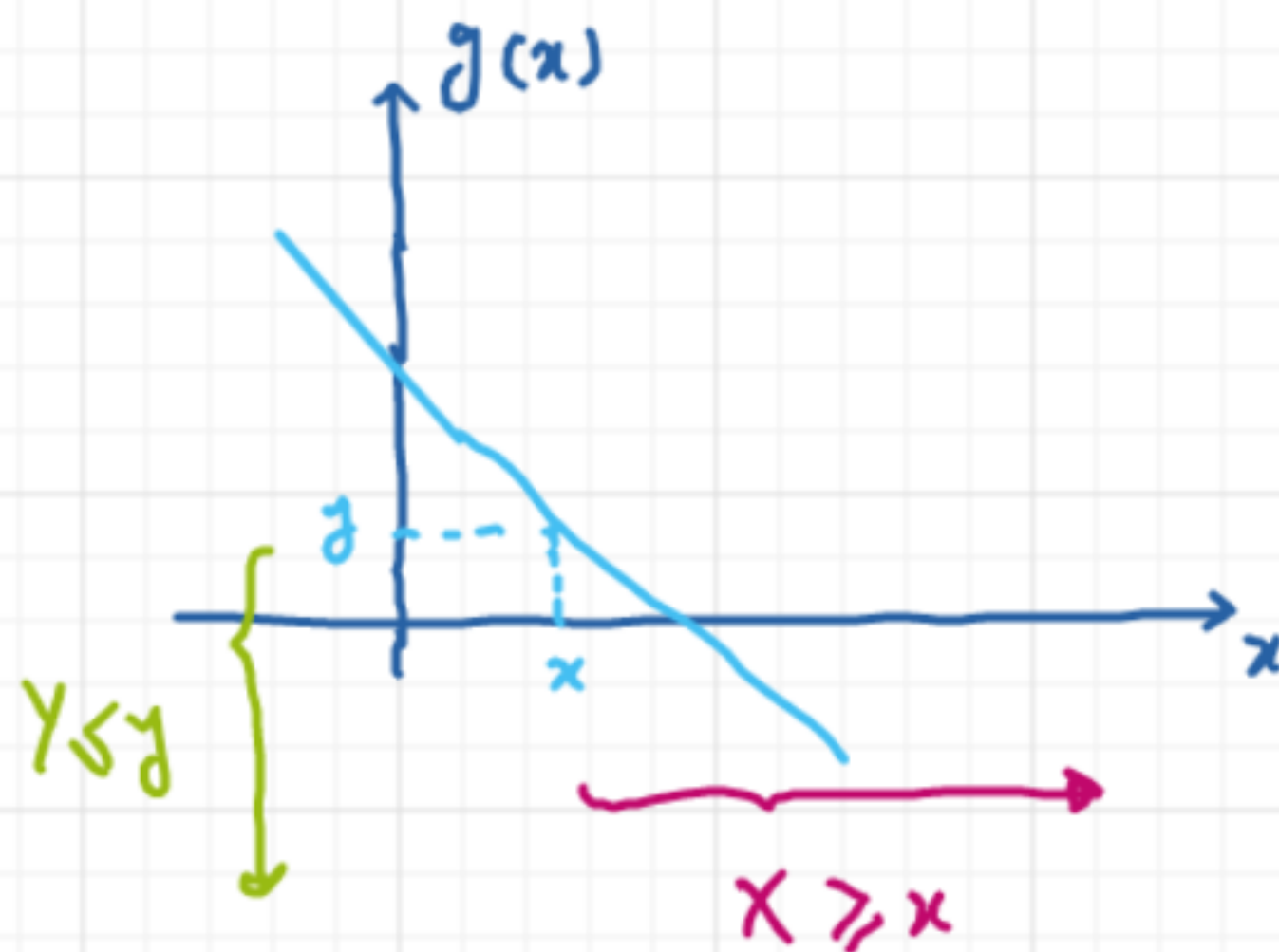
برای $a < 0$ به طور مشابه داریم:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y]$$

$$= P[ax + b \leq y]$$

$$= P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right]$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$



• برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال y کافی است از F_Y مشتق بگیریم:

$$a > 0: f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$a < 0 : f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \right] = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) : \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته است، $g(x) = x^2$ ، $Y = X^2$ توزیع Y ؟

$$\text{اگر } y < 0 : \nexists x : x^2 < y \Rightarrow F_Y(y) = P\{\emptyset\} = 0$$

$$\text{اگر } y > 0 : x^2 \leq y \text{ if } -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$$

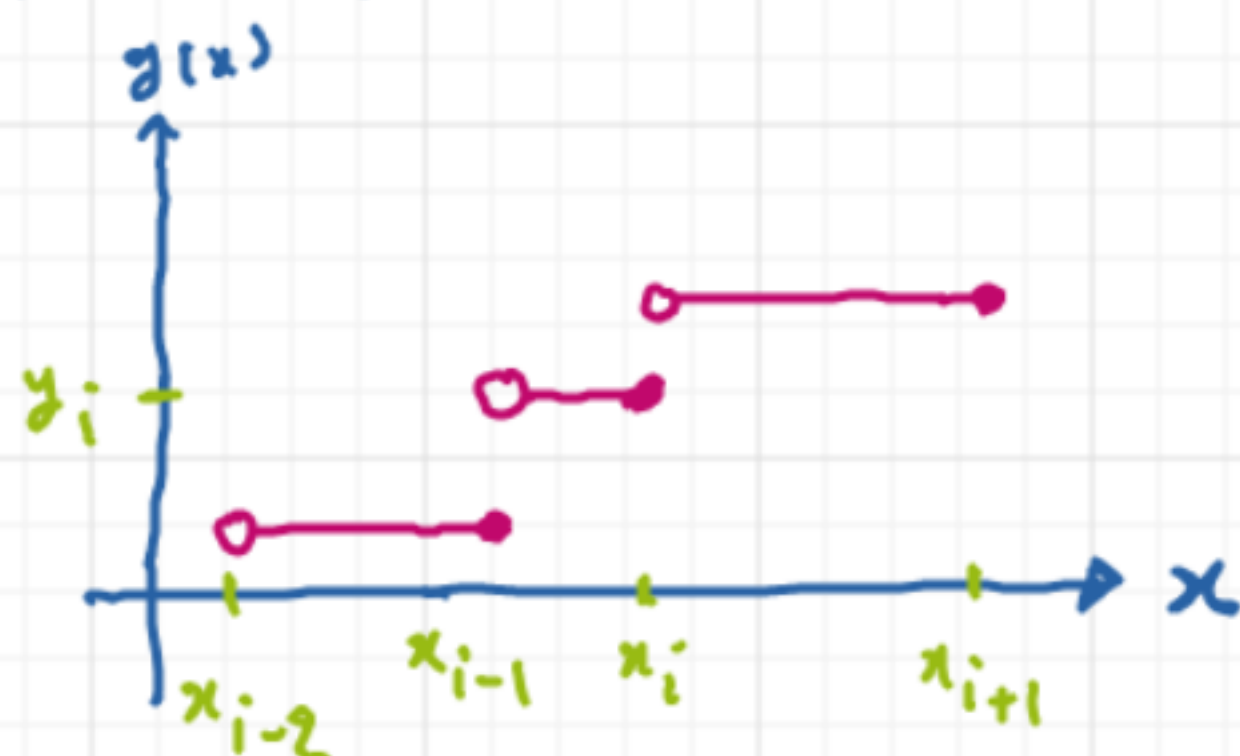
$$\Rightarrow \{Y \leq y\} = \{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

برای محاسبه f_Y از f_X مشتق می‌گیریم:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & : y > 0 \\ 0 & : y < 0 \end{cases}$$

• مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد و $g(x)$ یک تابع پله‌ای به شکل



ترسیم شده:

$$g(x) = g(x_i) = y_i \quad : \quad x_{i-1} < x \leq x_i$$

در این حالت متغیر $Y = g(X)$ یک متغیر گسسته می‌شود.

مطلوب است محاسبه PMF متغیر Y .

($g(x)$ مابانی از A/D یا کوانتایزاسیون هست).

$$P[Y=y_i] = P[x_{i-1} < X \leq x_i] = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) : \forall i$$

• میان مابان مابانی احتمال $g(x)$ بر حسب مابان مابانی احتمال f_X (بافتراض اینکه $g(x)$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد):

$$Y = g(X)$$

مطلوب است $f_Y(y)$.

فرض کنید R مجموعه‌ای است که در $\mathbb{R}$ قرار دارد:

$$\exists x : g(x) \in R$$

$$\Rightarrow P[g(X) \in R] = 0$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = 0 : y \in R$$

• **تقنیه:** برای یافتن $f_y(y)$ برای یک y خاص، ابتدا معادله $g(x)=y$ را حل می‌کنیم. فرض کنید ریشه‌های حقیقی این معادله به صورت زیر باشند:

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) = \dots$$

آنچه f_y را بر حسب f_x می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_x(x_n)}{|g'(x_n)|} + \dots$$

که g' مشتق تابع g است.

• **مثال:** فرض کنید $g(x) = ax + b$ ، x یک متغیر حقیقی کوچک باشد.

$$y = ax + b$$

برای محاسبه $f_y(y)$ برای y ابتدا معادله $y = ax + b$ را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{y-b}{a}$$

در از طرفی $g'(x) = a$
در نتیجه:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|} \quad \checkmark$$

این همان را جلدای است که قبلا به دست آورده ایم.